



### 14.1.3 Elektronische Vierpole (\*)

Als nächstes werden wir uns mit Schaltungen auseinandersetzen, die 4 Anschlüsse besitzen, s. Abb. 7. Ein solcher *Vierpol* tritt mit seiner elektronischen Umgebung

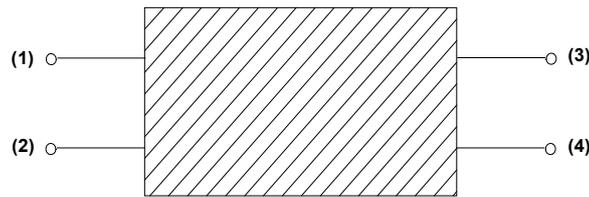


Abb. 7 Elektronischer Vierpol

über die 4 Ströme  $I_1$  bis  $I_4$  sowie über die 4 elektrischen Potentiale dieser Anschlüsse in Verbindung. Diese 4 Potentiale definieren 3 Spannungen, z.B. die Größen

$$U_{1,2} = U_1 - U_2 \quad (14.30)$$

und entsprechend  $U_{3,4}$  und  $U_{2,4}$ . Sofern der Vierpol keine Stromquelle enthält, gilt auch für ihn die Gl. 14.2, jetzt also in der Form

$$\sum_{i=1}^4 I_i = 0 \quad (14.31)$$

Im allgemeinsten Fall ist daher der Zustand eines Vierpols durch die Angabe von 3 Spannungswerten und von 3 Stromwerten festgelegt.

Wir wollen uns nun mit Vierpolen befassen, bei denen 2 Anschlüsse als *Eingang* fungieren, d.h. die mit diesen Anschlüssen verknüpften Strom- und Spannungswerte werden *von außen* vorgegeben, während die verbleibenden 2 Anschlüsse als *Ausgang* wirken. D.h. mit Festlegung der Eingangswerte sind die mit den Ausgangsanschlüssen verknüpften Strom- und Spannungswerte nicht mehr vorgebar, sondern durch das Verhalten des Vierpols bereits weitgehend festgelegt. Der noch verbleibende Freiheitsgrad wird durch die Art der elektrischen Verbindung zwischen den beiden Ausgangsanschlüssen (durch deren *Abschluss*) ausgeschöpft. Wir bezeichnen die Eingangsanschlüsse mit der Kennung (1) und (2) und entsprechend die Ausgänge mit (3) und (4). Als weitere Vereinfachung setzen wir voraus, dass die Bedingung

$$I_1 = -I_2 = I_e \quad (14.32)$$

erfüllt ist und damit wegen Gl. 14.31 auch

$$I_3 = -I_4 = I_a \quad (14.33)$$

Diese Bedingung lässt sich nicht *beweisen*; vielmehr kann man sogar Schaltungen angeben, die als Vierpole betrachtet diese Bedingung verletzen. Aus mancherlei Gründen, die insbesondere mit der Stabilität elektronischer Schaltungen und ihrer Unempfindlichkeit gegenüber äußeren Störsignalen zusammenhängen, können wir aber davon ausgehen, dass die überwiegende Zahl der real eingesetzten Vierpole diese Bedingung erfüllen.

Aus Gründen, die uns sehr bald einleuchten werden, treffen wir für die Ströme folgende Vorzeichenkonvention:  $I_1$  zählen wir positiv, wenn der Strom in den Anschluss (1) hineinfließt, und  $I_3$  zählen wir positiv, wenn er aus dem Anschluss (3) herausfließt. Schließlich setzen wir auch noch voraus, dass die Spannung  $U_{2,4}$  auf das Verhalten des Vierpols keinen Einfluss hat. Diese Irrelevanzbedingung für  $U_{2,4}$  ist trivialerweise erfüllt, wenn die beiden Anschlüsse (2) und (4) im Inneren des Vierpols miteinander elektrisch verbunden sind, wir es also mit einem Dreipol zu tun haben, s. Absatz S. 1844. Es gibt aber auch andere Konfigurationen des Inneren eines Vierpols, die ebenfalls diese Bedingung erfüllen. Aus mancherlei Gründen, die wir erst Zug um Zug im Laufe dieses Heftes 10.1.1 einsehen werden, ist es nämlich günstig, in einer elektronischen Schaltung jede elektrische Spannung, die als Informationsträger fungiert, in ihrem Absolutpotenzial nicht beliebig variierbar zu belassen. Statt dessen stellt man für sie **wohl definierte** Verhältnisse her, indem z.B. einer der beiden Anschlüsse auf ein wohl definiertes **konstantes** Potenzial (z.B. auf Erdpotenzial) gelegt wird. Dieser Anschluss wird dann im Laborjargon als das *kalte Ende* dieses Signals bezeichnet. Gilt dieses Konzept sowohl für die Ausgangs- wie für die Eingangsspannung, dann ist natürlich die Spannung zwischen diesen beiden kalten Enden ohne Bedeutung für die Funktion der Schaltung. Eine weitere durchaus übliche Arbeitsweise besteht darin, den Mittelwert der beiden Potentiale  $U_1$  und  $U_2$  auf eine konstantes Potenzial zu legen. Bei dieser Arbeitsweise sind die beiden Anschlüsse (1) und (2) bzgl. dieser Referenzierung gleichwertig. Man spricht daher von einem *symmetrischen Ein- bzw. Ausgang*. Dieser hat bzgl. der Störsignalunterdrückung große Vorteile, s. Abschnitt 14.7.2.

Unter diesen nun zusammengetragenen Bedingungen werden sowohl der Eingang als auch der Ausgang des Vierpols durch genau 2 Werte festgelegt, d.h. es gilt

$$U_{1,2} = U_e ; U_{3,4} = U_a$$

$$U_a = U_a(U_e, I_e) \quad (14.34)$$

$$I_a = I_a(U_e, I_e) \quad (14.35)$$

### Lineare Vierpole / Matrix-Kalkül (-)

Sofern der Zusammenhang zwischen den Eingangs- und den Ausgangsgrößen linear ist, lauten die Gl. 14.34 und 14.35 zusammengenommen in der aus dem Abschnitt 7.4.2 bekannten Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix} \quad (14.36)$$

und der Vierpol ist durch Angabe dieser 4 Kennwerte  $A_{ik}$  vollständig beschrieben. Bei der Verwendung dieser Schreibweise hat es sich eingebürgert, formal die Eingangsgrößen  $U_e$  und  $I_e$  als die abhängigen Variablen zu behandeln und die Ausgangsgrößen

als die unabhängigen. Wegen der Eineindeutigkeit jeder linearen Funktion ist dies letztlich unerheblich. Der Vorteil dieser Konvention besteht u.a. darin, dass dann die Kennwerte  $A_{ik}$  passiver Vierpole alle positiv sind. In dieser Definition haben die Matrixelemente  $A_{ik}$  unterschiedliche Dimensionen:  $A_{11}$  und  $A_{22}$  sind dimensionslos,  $A_{12}$  hat die Dimension einer Impedanz (z.B. die Einheit  $\text{Ohm}$ ) und  $A_{21}$  die eines Leitwertes (z.B.  $\text{Ohm}^{-1}$ ). Zur Unterscheidung gegenüber anders strukturierten Formulierungen für den linearen Zusammenhang zwischen den Größen ( $U_e, I_e, U_a, I_a$ ) hat die durch die Gl. 14.36 definierte Matrix den Namen *Kettenmatrix* erhalten, weil sie nämlich bei der unten erläuterten Kettenschaltung von Vierpolen von besonderem Nutzen ist. Der Vollständigkeit halber sei bereits an dieser Stelle angemerkt, dass sich dieser lineare Zusammenhang zwischen den Eingangs- und den Ausgangsgrößen auch in anderer Form darstellen lässt, z.B. derart dass die sich ergebende Matrix aus lauter Elementen von der Dimension eines Widerstandes besteht. Grundsätzlich sind diese verschiedenen Darstellungen einander gleichwertig. Die jeweiligen Matrizen lassen sich nach einem festen Formalismus in einander umrechnen. Je nach aktueller Fragestellung hat jedoch oft eine bestimmte Darstellung einen rechentechnischen Vorteil.

Die Kettenmatrixelemente  $A_{ik}$  eines real existierenden Vierpols lassen sich auf einfache Weise durch geeignet konzipierte Messungen bestimmen. Lassen wir bei einer Messung den Ausgang offen, dann gilt offenbar

$$I_a = 0 \Rightarrow U_e = A_{11} \cdot U_a ; I_e = A_{21} \cdot U_a \Rightarrow \quad (14.37)$$

$$\left( \frac{U_e}{I_e} \right)_{I_a=0} = Z_e(I_a = 0) = \frac{A_{11}}{A_{21}} \quad (14.38)$$

$$\left( \frac{U_e}{U_a} \right)_{I_a=0} = (\Gamma(I_a = 0))^{-1} = A_{11} \quad (14.39)$$

Schließen wir dagegen den Ausgang kurz, dann gilt

$$U_a = 0 \Rightarrow U_e = A_{12} \cdot I_a ; I_e = A_{22} \cdot I_a \Rightarrow \quad (14.40)$$

$$\left( \frac{U_e}{I_e} \right)_{U_a=0} = Z_e(U_a = 0) = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (14.41)$$

$$\left( \frac{I_e}{I_a} \right)_{U_a=0} = (\gamma(U_a = 0))^{-1} = A_{22} \quad (14.42)$$

$Z_e$  ist die Eingangs-Impedanz des Vierpols. Die durch die Gl. 14.39 definierte Größe  $\Gamma$  wollen wir als die (relative) *Spannungsübertragung* des Vierpols bezeichnen und analog dazu die durch die Gl. 14.42 definierte Größe  $\gamma$  als dessen (relative) *Stromübertragung*. Die Messung der Eingangs-Impedanz bei offenem und bei kurzgeschlossenem Ausgang sowie der Spannungsübertragung bei offenem Ausgang bzw. der Stromübertragung bei kurzgeschlossenem Ausgang lässt sich i.a. problemlos durchführen. Aus diesen Messwerten ergeben sich dann die 4 Kettenmatrixelemente  $A_{ik}$  über die Gl.-en 14.38, 14.39, 14.41 und 14.42.

Schließen wir nun 2 derartige Vierpole **A** und **B** in Form einer Kette hinter einander (s. Abb. 8), so wirken - auf Grund der zu Beginn dieses Abschnitts

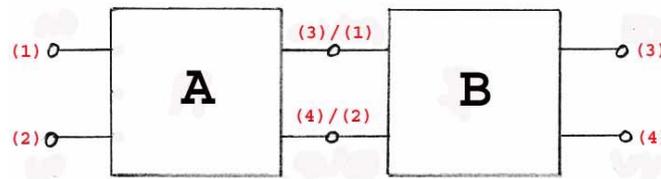


Abb. 8 Hintereinanderschaltung zweier Vierpole A und B

getroffenen Vorzeichenkonvention auch vorzeichenrichtig - die Ausgangsgrößen des 1. Vierpols als Eingangsgrößen für den nachfolgenden. Wie man leicht nachrechnen kann, ergeben sich die Kennwerte  $C_{ik}$  des durch diese Kettenschaltung entstandenen neuen Vierpols **C** nach den Rechenregeln der Multiplikation quadratischer Matrizen, s. wieder Abschnitt 7.4.2,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (14.43)$$

$$C_{ik} = \sum_{l=1}^N A_{il} \cdot B_{lk} \quad (14.44)$$

hier also

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} \\ C_{12} &= A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ C_{21} &= A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} \\ C_{22} &= A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{aligned} \quad (14.45)$$

Mit Hilfe des Matrizenkalküls lässt sich also jeder Vierpol, der durch Kettenschaltung gewisser Bestandteile entsteht, auf einfache Weise berechnen, sobald nur die Matrizen dieser Bestandteile bekannt sind. Wir werden dies in den nachfolgend behandelten Beispielen näher kennenlernen. Hierzu berechnen wir die Matrix der beiden einfachsten, in Abb. 9 wiedergegebenen Vierpole. Wie man leicht nachrechnen kann, gehört zu dem 1. Vierpol, dem parallel zu den Ein- und Ausgängen liegenden Leitwert  $Y$ , die Matrix

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad (14.46)$$

und zu dem 2. Vierpol, der zwischen Eingang und Ausgang liegenden Impedanz  $Z$ , die Matrix

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.47)$$

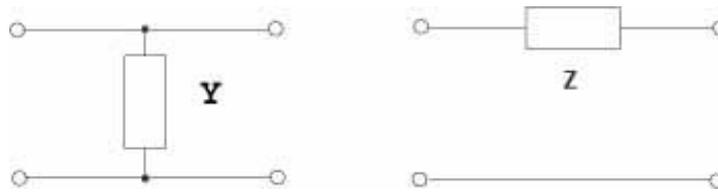


Abb. 9 Schaltskizze der beiden Basis-Vierpole

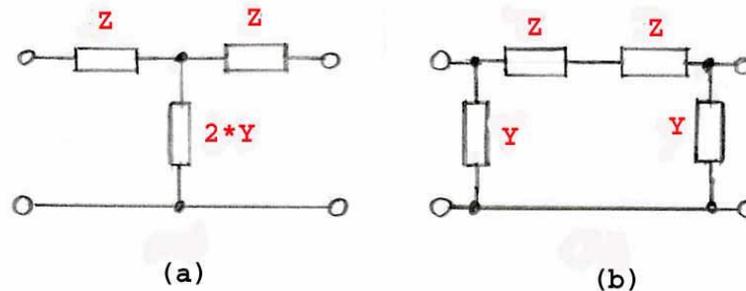
An dieser Stelle sei nochmals daran erinnert, dass die Größen  $Y$  und  $Z$  i.a. komplexwertig sind. Wie man unmittelbar nachrechnen kann, gilt für die Determinante dieser beiden Matrizen

$$\det(\mathbf{A}^{(1)}) = \det(\mathbf{A}^{(2)}) = 1 \quad (14.48)$$

Wegen des uns bereits aus dem Abschnitt 3.1.2 bekannten Determinantensatzes (Gl. 3.130) gilt dann aber diese Gl. auch für jeden Vierpol, der sich durch Kettenschaltung von endlich (oder auch abzählbar unendlich) vielen Vierpolen der Struktur nach Abb. 9 zusammensetzen lässt. D.h. insbesondere, dass jeder derartige Vierpol nicht mehr 4 unabhängige Parameter besitzt, sondern nur 3. Denn die 4 Parameter  $A_{ik}$  sind ja über die Gl. 14.48 mit einander verknüpft. Es genügt also z.B., die beiden Diagonalelemente  $A_{11}$  und  $A_{22}$  (z.B. über entsprechende Messungen) zu kennen sowie eines der beiden Elemente  $A_{12}$  oder  $A_{21}$ . Daraus kann dann das fehlende Element errechnet werden, z.B. gem.

$$A_{12} = \frac{A_{11} \cdot A_{22} - 1}{A_{21}} \quad (14.49)$$

Zur Einübung in diesen Formalismus berechnen wir die Vierpolmatrizen eines sog.  $T$ -Gliedes und eines sog.  $\pi$ -Gliedes (Abb. 10).

Abb. 10 Vierpol in (a)  $T$ -Schaltung bzw. (b)  $\pi$ -Schaltung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(T)} &= \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot Y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot Y \cdot Z & 2 \cdot Z \cdot (1 + Y \cdot Z) \\ 2 \cdot Y & 1 + 2 \cdot Y \cdot Z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.50)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(\pi)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot Y \cdot Z & 2 \cdot Z \\ 2 \cdot Y \cdot (1 + Y \cdot Z) & 1 + 2 \cdot Y \cdot Z \end{pmatrix} \quad (14.51)
\end{aligned}$$

Diese Beziehungen werden wir im Abschnitt 14.3.3 benötigen und dort auch eingehend diskutieren.

Zum Abschluss dieses Absatzes sei explizit darauf hingewiesen, dass die in der Abb. 8 skizzierte Kettenschaltung keinesfalls die einzig mögliche oder auch nur sinnvolle Verknüpfung zweier Vierpole ist. Vielmehr werden in elektronischen Schaltungen oft Baugruppen aus passiven Bauelementen verwendet, die sich nicht ausschließlich als Kettenschaltungen aus den in der Abb. 9 wiedergegebenen Basiselementen darstellen lassen. Hierauf werde ich im Kapitel 14.3 schlagwortartig eingehen. Zur Unterscheidung der dabei auftretenden neuartigen Verknüpfungen von Vierpolen von der bisher verwendeten sollte die Verknüpfung (wie geschehen) unbedingt als *Kettenschaltung* (und nicht etwa als Hintereinander- oder Serienschaltung) bezeichnet werden.

### Längssymmetrische Vierpole (-)

Wir wollen nun das Verhalten von Vierpolen diskutieren, deren Verhalten sich nicht verändert, wenn man die Eingangs- mit den Ausgangsklemmen vertauscht, die also *längssymmetrisch* sind. Anstatt die jeweiligen Klemmen zu vertauschen, können wir auch die an ihnen auftretenden Spannungen und Ströme uminterpretieren und die bisherigen Eingangsgrößen ( $U_e, I_e$ ) als Ausgangsgrößen auffassen und umgekehrt. Wegen der getroffenen Vorzeichenkonvention müssen dann gleichzeitig die Vorzeichen der Ströme herumgedreht werden. Ist der Vierpol längssymmetrisch, muss daher gelten

$$\begin{pmatrix} U_a \\ -I_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} U_e \\ -I_e \end{pmatrix} \quad (14.52)$$

Unter Verwendung der Matrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.53)$$

wird die Gl. 14.52 zu

$$\mathbf{V} \bullet \begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{V} \bullet \begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} \quad (14.54)$$

Hierin können wir aber erneut die Ausgangs-Gl. 14.36 einsetzen und erhalten als Bedingung dafür, dass ein Vierpol längssymmetrisch ist, die Beziehung

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{V} \bullet \mathbf{A} \quad (14.55)$$

Multiplizieren wir diese Matrixgleichung aus und vergleichen die beiden Ergebnis-Matrizen elementweise, so folgen daraus die Bedingungen

$$A_{11} = A_{22} \quad (14.56)$$

$$\det \mathbf{A} = 1 \quad (14.57)$$

Längssymmetrische Vierpole haben also nur noch 2 unabhängige Kennwerte. Aus Gründen, die wir erst nachträglich einsehen werden, verwenden wir hierfür die beiden Ausdrücke

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad (14.58)$$

$$\Gamma_0 = \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}} \quad (14.59)$$

In diesen Ausdrücken treten die Größen  $A_{11}$  und  $A_{22}$  nicht mehr explizit auf, sie haben ihre Relevanz jedoch keineswegs verloren, da sie ja über die Gl. 14.56 und 14.57 implizit mit den Größen  $Z_0$  und  $\Gamma_0$  verknüpft sind.  $Z_0$  hat offensichtlich die Dimension eines Widerstandes, und  $\Gamma_0$  ist dimensionslos. Unter Verwendung dieser Größen erhält die Kettenmatrix eines längssymmetrischen Vierpols die Struktur

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \Gamma_0^2} & Z_0 \cdot \Gamma_0 \\ \frac{\Gamma_0}{Z_0} & \sqrt{1 + \Gamma_0^2} \end{pmatrix} \quad (14.60)$$

Um einen ersten Hinweis auf die Bedeutung von  $Z_0$  zu erhalten, berechnen wir den Eingangswiderstand eines längssymmetrischen Vierpols, der mit dem ihm zugeordneten Widerstand  $Z_0$  abgeschlossen ist. Dies gelingt z.B. durch Betrachtung der Kettenschaltung nach Abb. 11 und Berechnung des Eingangswiderstands dieser Schal-

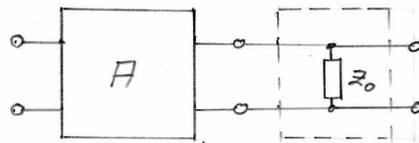


Abb. 11 Zur Bedeutung der Größe  $Z_0$

tung bei offenem Ausgang:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z_0^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 + \sqrt{1 + \Gamma_0^2} & Z_0 \cdot \Gamma_0 \\ Z_0^{-1} \cdot (\Gamma_0 + \sqrt{1 + \Gamma_0^2}) & \sqrt{1 + \Gamma_0^2} \end{pmatrix}$$

$$Z^{(C)}(I_a = 0) = \frac{C_{11}}{C_{21}} = \frac{\Gamma_0 + \sqrt{1 + \Gamma_0^2}}{Z_0^{-1} \cdot (\Gamma_0 + \sqrt{1 + \Gamma_0^2})} = Z_0 \quad (14.61)$$

Der Widerstand  $Z_0$  eines längssymmetrischen Vierpols ist also genau derjenige Wert, bei dessen Verwendung als Abschlusswiderstand der Abschluss- und der Eingangswiderstand des Vierpols identisch sind. Daher spielt er, wie wir sogleich sehen werden, insbesondere dann eine entscheidende Rolle, wenn aus diesem Vierpol eine Kette aus endlich (oder auch unendlich) vielen identischen Bausteinen aufgebaut wird. Wir berechnen nun noch das Verhältnis von Eingangs- und Ausgangsspannung unter diesen Bedingungen:

$$\frac{U_e}{U_a} = C_{11} = \Gamma_0 + \sqrt{1 + \Gamma_0^2} \quad (14.62)$$

Wir werden nun die Matrix einer Kette aus endlich vielen derartigen Bausteinen bestimmen. Hierzu berechnen wir in einem 1. Schritt die Kettenmatrix eines aus 2 identischen längssymmetrischen Vierpolen aufgebauten Vierpols:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left( \begin{array}{cc} \sqrt{1 + \Gamma_0^2} & Z_0 \cdot \Gamma_0 \\ \frac{\Gamma_0}{Z_0} & \sqrt{1 + \Gamma_0^2} \end{array} \right)^2 \\ &= \left( \begin{array}{cc} 1 + 2 \cdot \Gamma_0^2 & 2 \cdot Z_0 \cdot \Gamma_0 \cdot \sqrt{1 + \Gamma_0^2} \\ 2 \cdot \frac{\Gamma_0}{Z_0} \cdot \sqrt{1 + \Gamma_0^2} & 1 + 2 \cdot \Gamma_0^2 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (14.63)$$

Die bei dieser Kettenschaltung entstehende Systematik erkennen wir leichter, wenn wir folgende Variablensubstitution vornehmen:

$$\Gamma_0 = \sinh g \quad (14.64)$$

Da  $\sinh g$  eine monotone Funktion ist, können durch diese Transformation keinerlei mathematische Schwierigkeiten entstehen. Die durch diese Transformation definierte Größe  $g$  ist eine dimensionslose komplexe Zahl. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  (s. Abschnitt 3.1.1) lauten nun

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{cc} \cosh g & Z_0 \cdot \sinh g \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh g & \cosh g \end{array} \right) \quad (14.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left( \begin{array}{cc} \cosh^2 g + \sinh^2 g & 2 \cdot Z_0 \cdot \sinh g \cdot \cosh g \\ \frac{2}{Z_0} \cdot \sinh g \cdot \cosh g & \cosh^2 g + \sinh^2 g \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} \cosh 2 \cdot g & Z_0 \cdot \sinh 2 \cdot g \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \sinh 2 \cdot g & \cosh 2 \cdot g \end{array} \right) \end{aligned} \quad (14.66)$$

D.h. die Kettenschaltung hat die Größe  $Z_0$  unverändert gelassen und die Größe  $g$  verdoppelt. Daher vermuten wir nun, dass folgender Satz gilt:

**Theorem 198** *Durch Kettenschaltung von  $n$  identischen längssymmetrischen Vierpolen mit den Kenndaten  $Z_0$  und  $g$  ergibt sich ein ebenfalls längssymmetrischer Vierpol mit den Kenndaten  $Z_0$  und  $n \cdot g$ .*

Der Beweis dieses Satzes gelingt durch vollständige Induktion. Den Beweisschritt für  $n = 2$  haben wir bereits oben ausgeführt, der Beweisschritt von  $n$  nach  $n+1$  gelingt durch einfaches Nachrechnen. Aus Gründen, die wir bald einsehen werden, hat die Größe  $Z_0$  die Bezeichnung *Wellenwiderstand* erhalten und  $g$  die Bezeichnung *Fortpflanzungskonstante*.

### Aktive elektronische Vierpole (-)

Im Fall eines Zweipols haben wir diesen genau dann als *aktiv* bezeichnet, wenn die Bedingung 14.9 erfüllt ist, wenn also der Zweipol ständig einen endlichen elektrischen Energiestrom an die übrige elektronische Schaltung abgibt. In analoger Weise nennen wir nun einen elektronischen Vierpol genau dann aktiv, wenn er, als Einheit betrachtet, einen endlichen elektrischen Energiestrom an die übrige elektronische Schaltung abgibt. Wegen der oben erläuterten Vorzeichendefinition der relevanten Spannungen und Ströme eines Vierpols führt das zu der Bedingung

**Definition 199** *Ein Vierpol ist genau dann aktiv, wenn der Energiestrom  $J_a^{(E)}$  am Ausgang des Vierpols größer ist als der Energiestrom  $J_e^{(E)}$  an dessen Eingang:*

$$(J_a^{(E)} = \operatorname{Re}(U_a \cdot I_a)) > (J_e^{(E)} = \operatorname{Re}(U_e \cdot I_e)) \quad (14.67)$$

Diese Forderung lässt sich auch als eine Forderung an die Koeffizienten der Kettenmatrix  $\mathbf{A}$  dieses Vierpols ausdrücken. Hierzu berechnen wir zunächst den komplexen Ausdruck

$$\begin{aligned} U_e \cdot I_e - U_a \cdot I_a &= (A_{11} \cdot U_a + A_{12} \cdot I_a) \cdot (A_{21} \cdot U_a + A_{22} \cdot I_a) - U_a \cdot I_a \\ &= A_{11} \cdot A_{21} \cdot U_a^2 + A_{12} \cdot A_{22} \cdot I_a^2 \\ &\quad + (A_{11} \cdot A_{22} + A_{12} \cdot A_{21} - 1) \cdot U_a \cdot I_a \end{aligned} \quad (14.68)$$

Der Vierpol sei mit der Impedanz  $Z_a$  abgeschlossen,

$$U_a = Z_a \cdot I_a \quad (14.69)$$

Dann wird die Gl. 14.68 zu

$$U_e \cdot I_e - U_a \cdot I_a = \{A_{11} \cdot A_{21} \cdot Z_a^2 + A_{12} \cdot A_{22} + (A_{11} \cdot A_{22} + A_{12} \cdot A_{21} - 1) \cdot Z_a\} \cdot I_a^2 \quad (14.70)$$

Relevant für den zeitlichen Mittelwert (s. Gl. 14.19) der Energiestrombilanz ist daher die Impedanz

$$Z_{eff} = A_{11} \cdot A_{21} \cdot Z_a^2 + A_{12} \cdot A_{22} + (A_{11} \cdot A_{22} + A_{12} \cdot A_{21} - 1) \cdot Z_a \quad (14.71)$$

Über das Vorzeichen des Realteils dieser Größe lässt sich offenbar keine einfache Aussage machen und damit auch nicht zur Frage, welche Bedingungen die Koeffizienten

der Matrix  $\mathbf{A}$  in Zusammenwirken mit der Abschlussimpedanz  $Z_a$  erfüllen müssen, damit der Vierpol aktiv ist. Ich beschränke mich daher an dieser Stelle darauf, ein einfaches Beispiel für einen aktiven Vierpol zu nennen und zu zeigen, dass der Realteil seines Kennwertes  $Z_{eff}$  tatsächlich negativ ist. Das wohl einfachste derartige Beispiel ist der Spannungsverstärker mit einem endlichen, reellen Eingangswiderstand  $R_e$  und mit einer konstanten Spannungsverstärkung  $\Gamma$ , aber mit einem endlichen, ebenfalls reellen inneren Widerstand  $R_i$ . Der Ausgang des Vierpols sei mit dem reellen Widerstand  $R_a$  abgeschlossen. An einem derartigen Vierpol führen die im Absatz S. 1833 beschriebenen Messungen zu folgendem Ergebnis:

$$\left(\frac{U_e}{I_e}\right)_{I_a=0} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = R_e \quad (14.72)$$

$$\left(\frac{U_e}{U_a}\right)_{I_a=0} = A_{11} = \frac{1}{\Gamma} \quad (14.73)$$

$$\left(\frac{U_e}{I_e}\right)_{U_a=0} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = R_e \quad (14.74)$$

$$\left(\frac{I_e}{I_a}\right)_{U_a=0} = A_{22} = \frac{R_i}{R_e \cdot \Gamma} \quad (14.75)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  dieses Verstärkers beträgt demnach

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Gamma} \cdot \begin{pmatrix} 1 & R_i \\ \frac{1}{R_e} & \frac{R_i}{R_e} \end{pmatrix} \quad (14.76)$$

und die Impedanz  $Z_{eff}$

$$\begin{aligned} Z_{eff} &= \frac{1}{\Gamma^2} \cdot \frac{R_a^2}{R_e} + \frac{1}{\Gamma^2} \cdot \frac{R_i^2}{R_e} + \frac{1}{\Gamma^2} \cdot \left( \frac{R_i}{R_e} + \frac{R_i}{R_e} - 1 \right) \cdot R_a \\ &= \frac{R_a}{\Gamma^2 \cdot R_e} \cdot \{ (R_a + R_i)^2 - 1 \} \\ &= \frac{1}{\Gamma^2 \cdot R_e} \cdot (R_a + R_i)^2 - R_a \end{aligned} \quad (14.77)$$

Da in unserem Beispiel  $Z_{eff}$  reell ist, ist der Vierpol aktiv, wenn

$$\frac{1}{\Gamma^2 \cdot R_e} \cdot (R_a + R_i)^2 < R_a \Rightarrow \quad (14.78)$$

$$\frac{(R_a + R_i)^2}{R_e \cdot R_a} < \Gamma^2 \quad (14.79)$$

Wählt man den Abschlusswiderstand genügend hoch, ist diese Bedingung nicht erfüllt. Eine reine Spannungsverstärkung, bei der der Ausgang nahezu unbelastet bleibt, ist also grundsätzlich auch mit rein passiven Elementen möglich. Sobald dem Verstärker dagegen am Ausgang eine merkliche Leistung entzogen wird, wird neben einer Spannungsverstärkung i.a. auch eine Leistungsverstärkung benötigt, was nur mit einem aktiven Vierpol möglich ist.

## Dreipole (-/-)

(XXX: Der Text des Absatzes *Dreipole* ist noch nicht verfügbar.)

## 14.2 Technische Bauteile (-)

Dieses Kapitel stellt die wichtigsten technische Bauteile vor, die beim Aufbau elektronischer Baugruppen und Geräte üblicherweise zum Einsatz gelangen. Dabei geht es mir weniger um eine möglichst aktuelle Beschreibung des jeweiligen Stands der technischen Entwicklung. Diese sollte der Leser besser aus den Informationsschriften der Bauteile-Hersteller entnehmen. Ähnlich wie an verwandten Stellen in diesem Buch (s. z.B. Kapitel 11.6) möchte ich einen Überblick geben über die verschiedenen physikalischen Funktionsprinzipien, mit denen die jeweils gewollte Funktion realisiert worden ist, und darlegen, welche typischen Eigenschaften und Spezifikationen sich daraus ergeben. Bei der Gliederung des Textes werde ich mich weitgehend an die bereits im Kapitel 1.5 genannte Gliederung für die Beschreibung technischer Bauteile halten.

### 14.2.1 Widerstände (\*)

Elektronische Bauelemente, die einen Zweipol mit in guter Näherung reeller Impedanz bilden, werden als (ohmsche) *Widerstände* bezeichnet. Sie bilden das bei weitem am häufigsten eingesetzte Bauelement der Elektronik und dienen z.B. als Spannungsteiler, Strom/Spannungswandler oder umgekehrt als Spannungs/Stromwandler. Die einfachste technische Realisierung eines Widerstandes ist der *Drahtwiderstand*. Er besteht aus einem Draht, der auf einen nichtleitenden z.B. keramischen Träger aufgewickelt ist. Der Widerstandswert errechnet sich gemäß

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (14.80)$$

$\rho$  : als *spezifischer Widerstand* bezeichnete Materialkonstante

$l$  : Länge des Drahtes

$A$  : Querschnittsfläche des Drahtes

s. Abschnitt 8.2.7. Häufig verwendete Materialien sind Kupfer und *Konstantan*<sup>®</sup> (ein Markenname der ThyssenKrupp GmbH), eine Legierung aus 55 · % Kupfer und 45 · % Nickel mit einem gegenüber den meisten Metallen um mehr als den Faktor 100 niedrigeren Temperaturkoeffizienten des spezifischen Widerstandes. Wie man auf Basis des Zahlenwertes für den spezifischen Widerstand von Kupfer (s. Kapitel 14.12) leicht nachrechnen kann, lassen sich Drahtwiderstände nur mit verhältnismäßig kleinen Widerstandswerten realisieren. Z.B. beträgt der Widerstand von 10 · m Kupferdraht von 0,5 · mm Durchmesser 0,907 · Ω. Und sobald man allzu lange Drähte in vielen Lagen aufeinander wickelt, ergibt sich bereits eine signifikante Induktivität