

Heft 4

ELEKTROSTATIK - BASIS VON BLITZ UND FAX (-)

Die von mir gewählte Aufteilung der Elektrodynamik in die quasi-statischen Phänomene der *Elektrostatik* und *Magnetostatik* und in den von den zeitlichen Veränderungen der elektrischen und magnetischen Felder dominierten Teil der Theorie, die eigentliche *Elektrodynamik*, hat primär didaktische Vorteile. Sie entspricht aber auch in etwa der historischen Entwicklung. Bereits im Jahr 1600 berichtete *William Gilbert* (* 1544 in Colchester/England; † 1603 in London) über erste Experimente zur Reibungselektrizität (v. $\epsilon\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\omega\nu$ (griech.) Bernstein). Aber erst ab etwa 1730 entwickelte sich daraus eine wissenschaftliche Theorie, insbesondere durch Arbeiten von *Charles François de Cisternay du Fay* (* 1698 in Paris; † 1739 ebenda), von *Otto von Guericke* (* 1606 in Magdeburg; † 1686 in Hamburg) *und von dem Buchdrucker, Politiker und Naturwissenschaftler *Benjamin Franklin* (* 1706 in Boston/Mass (damals Neu-England); † 1790 in Philadelphia/Pa.(USA)), der als erster die Begriffe *positiv* bzw. *negativ* zur Unterscheidung der unterschiedlichen Typen von elektrischer Ladung benutzte und u.a. den Blitzableiter erfand. *Charles Augustin de Coulomb* (* 1736 in Angoulême; † 1806 in Paris) schließlich gelang es, den Zusammenhang zwischen den elektrischen Ladungen und den von ihnen erzeugten Kräften als Hypothese quantitativ zu formulieren. Später gelang ihm auch die experimentelle Bestätigung mit Hilfe einer Drehwaage. Danach wandte sich das Hauptinteresse der physikalischen Forschung rasch anderen, nur lose mit der Elektrostatik verknüpften Gebieten zu, zunächst insbesondere der Elektrochemie und der Elektrodynamik. Auch wenn sie in der universitären Lehre inzwischen eher unbeachtet bleibt, ist die Elektrostatik dennoch bis heute ein technisch bedeutendes Gebiet geblieben. Sie wird nur oft bzgl. dieser Bedeutung unterschätzt. Als Stichworte zur Untermauerung dieser Behauptung nenne ich - neben dem Wettergeschehen - den elektrostatischen Kopierer, die elektrostatische Stabilisierung von Dispersionen und die Vermeidung elektrostatischer Aufladungen bei schnell laufenden Produktionsmaschinen, die bei entsprechend reaktionsfähigen Verarbeitungsprodukten eine starke Explosionsgefahr darstellen. Auf einige dieser technisch bedeutenden Anwendungen der Elektrostatik werde ich im Laufe dieses Heftes noch näher eingehen, insbesondere im Kapitel 4.8.

*Guerickes Arbeiten stellten allerdings nur bzgl. der experimentellen Vorgehensweise einen Fortschritt dar. Seine aus den Ergebnissen formulierten Folgerungen, die Hypothese der Existenz kosmischer Kräfte, waren dagegen aus heutiger Sicht eher fortschrittshemmend.

Wenn wir einmal das Wettergeschehen außer Acht lassen, bei dem beachtliche Stromstärken auftreten, dann ist ein typisches Kennzeichen von durch elektrostatische Vorgänge dominierten Situationen das Auftreten relativ **hoher** elektrischer Spannungen an Objekten mit relativ **niedriger** Kapazität (zur Speicherung von elektrischer Ladung), so dass letztlich nur vergleichsweise **niedrige** Ströme fließen können. Als in die Elektrostatik einführende Literatur nenne ich [1] und [2].

Bei der Darstellung der Elektrostatik bin ich des öfteren gezwungen, bereits thermodynamische Begriffe zu verwenden, die ich erst im Heft 8 einführen werde. Dies trifft insbesondere auf das Kapitel 4.4 zu. Ich werde hierbei auf jeden vorab angebotenen Erklärungsversuch für diese Begriffe verzichten, bitte den Leser hierfür um Nachsicht und verweise zur Begründung dieser Vorgehensweise auf die diesbezüglichen Ausführungen im Kapitel 1.5. In dem Kapitel 4.4 werden wir zum 1. Mal intensiv von dem Konzept des *System-Responses* Gebrauch machen sowie von der Darstellung periodisch veränderlicher Größen durch komplexe Zahlenwerte. Deshalb habe ich die hierfür erforderlichen mathematischen Grundlagen in den nun folgenden beiden Kapiteln zusammengefasst.

4.1 Komplexe Zahlen und Funktionen (-)

Komplexe Zahlen sind von essentieller Bedeutung für das Gebäude der Mathematik ebenso wie für das der Physik. In der Mathematik wurden viele Aussagen der reellen Algebra und Analysis sowie der Zahlentheorie auf dem Umweg über die Theorie der Analysis komplexwertiger Funktionen bewiesen. Letztere wird üblicherweise (wenn auch wenig präzise) als *Funktionentheorie* bezeichnet. In der klassischen Physik spielt die Funktionentheorie insbesondere bei der Behandlung von Systemantworten (Kapitel 4.2.3) eine entscheidende Rolle. Wir werden ihr insbesondere immer dann begegnen, wenn es um die Beschreibung zeitlich und/oder örtlich periodischer Vorgänge geht. Für die Quantenmechanik, deren fundamentales Prinzip der sog. *Welle-Teilchen-Dualismus* ist, also die Aussage, dass jedes physikalische Objekt sich je nach den vorherrschenden experimentellen Bedingungen eher wie ein Teilchen oder eher wie eine Welle verhält, ist die Funktionentheorie von Anfang an unverzichtbar.

4.1.1 Algebra der komplexen Zahlen (*)

Wir haben bereits mehrere Erweiterungen einer Zahlenmenge kennengelernt (Abschnitt 3.1.4), die ihre Begründung jeweils darin fanden, dass durch diese Erweiterung die Ausführung einer bestimmten Rechenoperation nicht mehr aus der betrachteten Menge herausführt. So ermöglichte die Erweiterung der natürlichen zu den ganzen Zahlen, dass die Subtraktion als Umkehrung der Addition immer zulässig ist, und die Erweiterung der ganzen zu den rationalen Zahlen sichert die generelle Anwendbarkeit der Division als Umkehrung der Multiplikation. Analog werden die komplexen Zahlen oft in der Weise eingeführt, dass eine immer mögliche Radizierung als Umkehrung

der Potenzbildung gefordert wird:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad (4.1)$$

Die im Körper der reellen Zahlen nicht existierenden Lösungen dieser Gl. 4.1

$$y < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}^1 \quad (4.2)$$

werden nun *mit Gewalt* erzeugt, indem die Existenz der neuen Einheit

$$i = \sqrt{-1} \quad (4.3)$$

als a priori gegeben angesehen wird und ebenso die Regel, dass man mit den auf diese Weise konstruierten Ausdrücken der Form

$$z = a + b \cdot i ; a, b \in \mathbb{R}^1 \quad (4.4)$$

genauso rechnen darf, wie man es von den reellen Zahlen her gewohnt ist. Diese Vorgehensweise erzeugt zu Recht bei jedem Neuling ein sich tief eingrabendes Unbehagen. Sie entbehrt in der Tat jeder mathematisch-logischen Strenge. Ich werde im folgenden den logisch korrekten Weg zu den komplexen Zahlen skizzieren, dabei aber wieder die meisten Beweise auslassen. Außerdem werde ich einige wenige Begriffsbildungen und Aussagen bereits jetzt verwenden, die wir in logischer Strenge erst im Kapitel 7.4.1 kennenlernen werden. Als Literatur der komplexen Analysis verweise ich auf [30].

Wir beginnen diesen Weg unmittelbar mit der Definition einer komplexen Zahl:

Definition 118 Eine komplexe Zahl ist ein 2-dimensionaler Vektor mit reellwertigen Komponenten:

$$z = (x; y) ; x, y \in \mathbb{R}^1 \quad (4.5)$$

Die Addition zweier komplexer Zahlen ist auf Grund der Vektoreigenschaft unmittelbar erklärt (nämlich als komponentenweise Addition). Die Menge aller auf diese Weise definierten komplexen Zahlen werden wir mit dem Zeichen $\hat{\mathbb{C}}$ abkürzen. Wir gehen jetzt aber über dieses Konstrukt des 2-dimensionalen Vektorraums hinaus und definieren in $\hat{\mathbb{C}}$ auch eine *Multiplikation* \circ , deren Ergebnis wieder in $\hat{\mathbb{C}}$ liegt:

Definition 119 Die *Multiplikation* \circ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 ergibt sich aus der Rechenvorschrift

$$z_1 = (x_1; y_1) ; z_2 = (x_2; y_2) \Rightarrow z_1 \circ z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2; x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \quad (4.6)$$

An dieser Stelle des eingeschlagenen Weges ist die Bezeichnung komplexe Zahl nur ein Name, eine Verbindung mit der Quadratwurzel negativer Zahlen liegt (noch) in weiter Ferne. Auch der eventuelle Zusammenhang zwischen der im \mathbb{R}^1 erklärten Multiplikation \cdot und der neuen in $\hat{\mathbb{C}}$ definierten ebenfalls als *Multiplikation* bezeichneten Operation \circ ist noch in keiner Weise offensichtlich. Für diese Operation gelten folgende Aussagen:

Theorem 120 *Der Vektorraum $\hat{\mathbf{C}}$, vermindert um das Element $(0; 0)$ bildet bzgl. der durch 119 erklärten Operation \circ eine kommutative Gruppe, d.h. es gelten die im Abschnitt 7.4.1 erklärten Axiome 15 bis 18.*

Da diese Axiome insbesondere die **eindeutige** Existenz des inversen Elementes zu jeder Multiplikation fordern, musste das Nullelement ausgeschlossen werden, denn es gilt ja

$$z \circ (0; 0) = (0; 0) \quad \forall z \in \hat{\mathbf{C}} \quad (4.7)$$

Die eindeutige Existenz des inversen Elementes ist aber gleichbedeutend mit der Existenz der Umkehroperation zu \circ . Diese nennen wir dann die *Division* und schreiben sie

$$z_1 \circ w = z_2 \Leftrightarrow w = z_2 \setminus z_1 \quad (4.8)$$

Dieser spezielle Bruchstrich \setminus steht an dieser Stelle (noch) in keinerlei logischem Zusammenhang mit dem für die Kennzeichnung der Division 2-er reeller Zahlen benutzten Bruchstrich.

Theorem 121 *Für den Vektorraum $\hat{\mathbf{C}}$ mit der Multiplikation \circ gilt das Distributivgesetz*

$$z_1 \circ (z_2 + z_3) = z_1 \circ z_2 + z_1 \circ z_3 \quad (4.9)$$

Der Beweis dieser beiden Aussagen 120 und 121 gelingt durch einfaches Nachrechnen, s. Aufgabe 1. Einen Vektorraum, in dem zusätzlich eine weitere Operation erklärt ist, für die die Sätze 120 und 121 gelten, bezeichnet man aber als einen *Körper*. Für den Körper $\hat{\mathbf{C}}$ gelten alle algebraischen Rechenregeln, die auch für den Körper der reellen Zahlen gelten. Denn sie wurden ausschließlich auf Basis dieser Axiome bewiesen.

Die komplexe Zahl z^* , die dadurch aus z entsteht, dass man das Vorzeichen der 2. Komponente wechselt, bezeichnet man als die zu z *konjugiert komplexe Zahl*,

$$z = (x; y) \Rightarrow z^* = (x; -y) \quad (4.10)$$

Diese Zuordnung $z \rightarrow z^*$ ist offensichtlich immer eindeutig. Außerdem gilt offenbar

$$z \circ z^* = (x; y) \circ (x; -y) = (x^2 + y^2; 0) \quad (4.11)$$

Für komplexe Zahlen, bei denen jeweils eine Komponente verschwindet, gilt offensichtlich

$$(x_1; 0) \circ (x_2; 0) = (x_1 \cdot x_2; 0) \quad (4.12)$$

$$(0; y_1) \circ (0; y_2) = (-y_1 \cdot y_2; 0) \quad (4.13)$$

$$(0; y)^2 = (0; y) \circ (0; y) = (-y^2; 0) \quad (4.14)$$

D.h. bei komplexen Zahlen, deren 2. Komponente verschwindet, reduziert sich die Multiplikation \circ auf die im Bereich der reellen Zahl definierte Operation \cdot der Multiplikation der 1. Komponente. Wir dürfen also - ohne einen Fehler zu machen - die komplexen Zahlen mit verschwindender 2. Komponente mit den reellen Zahlen identifizieren! Komplexe Zahlen mit verschwindender 1. Komponente nennen wir *imaginäre Zahlen*. Wegen der Vektoreigenschaften der komplexen Zahlen lässt sich jede imaginäre Zahl darstellen als

$$(0; y) = y \cdot (0; 1) = y \cdot i \quad (4.15)$$

Den Basisvektor $(0; 1)$ der imaginären Zahlen werden wir wie allgemein üblich mit dem Buchstaben i abkürzen. Mit dieser Konvention lässt sich nun aber jede komplexe Zahl in der Form

$$z = x + i \cdot y \quad (4.16)$$

darstellen, und die spezielle Regel für die Multiplikation \circ ist formal verschwunden. Sie verbirgt sich hinter der Bedeutung der imaginären Einheit i mit der Eigenschaft

$$i^2 = -1 \Rightarrow \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} z_1 \circ z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) \\ &= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_2 \cdot y_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2) \end{aligned} \quad (4.18)$$

D.h. allein durch Verwendung der Gl. 4.17 in Verbindung mit der gewohnten Multiplikation \cdot im Bereich der reellen Zahlen reproduziert sich bereits die Multiplikationsvorschrift 119 für die komplexen Zahlen. Eine analoge Aussage gilt für die Division. Auch hierbei dürfen wir also unter Beachtung der bereits genannten Vorschriften die Operation $z_1 \setminus z_2$ mit der Operation $\frac{z_1}{z_2}$ identifizieren.

Die oben abgeleitete Beziehung 4.11 bedeutet, dass die Größe $z \circ z^*$ nichts anderes ist als das Quadrat der Länge des 2-dimensionalen Vektors $(x; y)$

$$z \circ z^* = |z|^2 = (x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^1 \quad (4.19)$$

D.h. im Raum der komplexen Zahlen ist über diese Beziehung eine *Norm* erklärt und damit auch ein *Abstand*, der seinerseits Voraussetzung ist für die Entwicklung der im nachfolgenden Abschnitt 4.1.2 behandelten Analysis der komplexen Funktionen.

Bei vielen konkreten Anwendungen haben der Realteil einer berechneten komplexen Zahl z und ebenso deren Imaginärteil jeweils für sich genommen eine besondere Bedeutung. Zur Vereinfachungen der Schreibweise für derartige Beispiele vereinbaren wir daher die folgende Abkürzung:

$$\operatorname{Re}(z) \text{ für den Realteil von } z \quad (4.20)$$

$$\operatorname{Im}(z) \text{ für den Imaginärteil von } z \quad (4.21)$$

Es gilt also immer

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \quad (4.22)$$

Wie jeder andere 2-dimensionale Vektor lässt sich auch jede komplexe Zahl als Ortsvektor \vec{r} in der Ebene darstellen. Die beiden orthogonalen Achsen entsprechen dann den Vielfachen der Basisvektoren $(1; 0) = 1 \in \mathbb{R}^1$ und $(0; 1) = i$, s. Abb. 1. Wenn wir

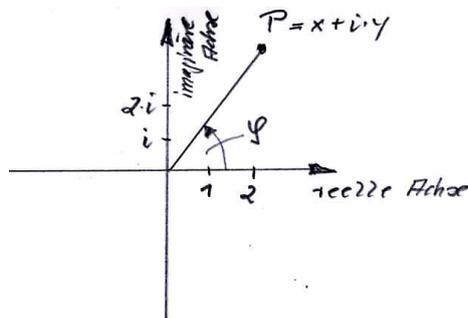


Abb. 1 Darstellung der komplexen Zahlen als Ortsvektoren in der Gauss-Ebene

den Winkel zwischen diesem Ortsvektor \vec{r} und der reellen Achse mit φ bezeichnen, gilt offenbar

$$x = r \cdot \cos \varphi ; \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad (4.23)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.24)$$

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (4.25)$$

Die Darstellung in den Koordinaten $(r; \varphi)$ gem. Gl. 4.25 ist die 2. häufig benutzte Darstellungsart für komplexe Zahlen, die Darstellungsebene wird meist als die *Gauss-Ebene* bezeichnet. Die 3. Darstellungsart ergibt sich daraus über die sog. *Eulersche Formel* für komplexe Zahlen,

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \Rightarrow \quad (4.26)$$

$$e^{-i \cdot \varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi \quad (4.27)$$

Diese Beziehung folgt unmittelbar aus dem Vergleich der Reihenentwicklung für die Funktionen e^z einerseits und $\cos z$ und $\sin z$ andererseits, s. Abschnitt 3.1.9. Wir können daher jede komplexe Zahl auch in der Form

$$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} \quad (4.28)$$

darstellen. Um Verunsicherungen des Lesers zu vermeiden sei betont, dass sowohl in der Darstellung gem. Gl. 4.25 als auch in Gl. 4.28 die Größen r und φ immer **reell** sind,

$$r, \varphi \in \mathbb{R}^1 \quad (4.29)$$

Im übrigen sind diese 3 Darstellungsarten völlig gleichwertig, jede mit ihr durchgeführte Berechnung führt unabhängig von der verwendeten Darstellungsart immer zu demselben Ergebnis!

Nachdem wir nun eine logisch strenge Einführung der komplexen Zahlen kennengelernt haben, bleibt für den praktischen Umgang mit ihnen noch einmal festzuhalten: Die Rechenregeln für jede Art von algebraischer Umformung komplexwertiger Ausdrücke sind mit denen für die reellen Zahlen völlig identisch. Je nach Art der konkreten Aufgabenstellung ist eine der 3 Darstellungsarten, also nach der Basis-Definition 118, nach Gl. 4.16 oder nach Gl. 4.28 von rechentechnischem Vorteil. Will man einen gebrochenen komplexen Ausdruck in eine dieser Normalformen bringen, muss man zunächst den Nenner dieses Ausdrucks in einen reellen Ausdruck wandeln. Dies gelingt durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Ausdruck des Nenners, s. Aufgabe 14.

Als ein Beispiel für die in der Einleitung zu diesem Abschnitt genannten Vereinfachungen in den mathematischen Strukturen beim Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen nenne ich den sog. *Fundamentalsatz der Algebra*:

Theorem 122 *Die algebraische Gleichung*

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot z^i = 0 \quad ; \quad a_i \in \hat{\mathbb{C}} \quad (4.30)$$

hat genau n Lösungen $r_i \in \hat{\mathbb{C}}$ und es gilt

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - r_i) \quad (4.31)$$

Dabei können auch identische Lösungen $r_k = r_j$ auftreten.

Im Bereich der reellen Zahlen gilt ein analoger Satz nicht! Z.B. hat die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ **keine** reelle Lösung.

Wenn eine physikalische Größe komplexwertig wird, bedeutet dies immer, dass man ihr einen Betrag und eine Phase zuordnen kann. Dies ist i.a. gleichbedeutend damit, dass diese Größe einen zeit- und/oder ortsabhängigen Vorgang charakterisiert mit im Prinzip beliebigem Verlauf, der aber in eine Fourierreihe bzw. in ein Fourierrintegral entwickelt werden kann, s. Absatz *Fourier-Reihen* auf S. 172. Ich werde auf diese Frage der Bedeutung komplexwertiger physikalischer Größen im Abschnitt 4.2.7 näher eingehen.

Es ist noch interessant anzumerken, dass eine zu den komplexen Zahlen - also den 2-dimensionalen Vektoren - analoge Konstruktion für 3-dimensionale Vektoren bis heute nicht gelungen ist, also die Definition einer Abbildung $\mathbb{R}^3 \diamond \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart, dass die Menge $\mathbb{R}^3 - (0; 0; 0)$ bzgl. dieser Verknüpfung eine kommutative Gruppe bildet. (XXX: Hinweis-1)

4.1.2 Die Ableitung komplexer Funktionen (*)

Um die Konzepte der Analysis auf den Körper der komplexen Zahlen ausdehnen zu können, müssen wir in der Lage sein, Folgen von komplexen Zahlen zu konstruieren und deren Konvergenz zu untersuchen. Dazu benötigen wir in $\hat{\mathbb{C}}$ die Definition eines *Abstands*. Dieser ist aber bereits durch die Gl. 4.19 festgelegt, so dass wir unmittelbar mit der Definition der Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktion beginnen können:

Definition 123 Eine Funktion $f(z) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ heißt differenzierbar an der Stelle $\xi \in \hat{\mathbb{C}}$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{|z-\xi| \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} = \frac{df(z)}{dz} \quad (4.32)$$

existiert.

Dies bedeutet wieder, dass jede Folge

$$\left(\frac{f(z_i) - f(\xi)}{z_i - \xi} \right) \quad (4.33)$$

konvergent ist und zwar immer gegen denselben Grenzwert, solange nur die Bedingung $|z_i - \xi| \rightarrow 0$ erfüllt ist. Das aber ist eine wesentlich stärkere Einschränkung als im Fall der reellen Funktionen $f(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Anschaulich gesprochen gibt es im Fall der reellen Funktionen nur 2 Möglichkeiten, sich dem Punkt ξ zu nähern, nämlich von größeren Werten her oder von kleineren Werten (oder in Kombinationen davon, was aber nichts grundsätzlich Neues ergibt). Im Fall der komplexen Funktionen $f(z) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ gibt es beliebig viele verschiedene Richtungen innerhalb der Gauss-Ebene, aus denen die Annäherung an den Punkt ξ erfolgen kann. Für alle diese Möglichkeiten müssen die derart konstruierten Folgen 4.33 zu demselben Grenzwert führen. Nur dann ist die Funktion $f(z)$ an dieser Stelle differenzierbar. Daher ist keinesfalls jede aus 2 differenzierbaren reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ zusammengesetzte komplexe Funktion $f(z) = u(x; y) + i \cdot v(x; y)$ ebenfalls differenzierbar! Vielmehr müssen diese beiden reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ eine ganz bestimmte Struktur haben. Diese Überlegungen führen zum folgenden Satz:

Theorem 124 Eine komplexe Funktion $f(z) = u(x; y) + i \cdot v(x; y)$ ist genau dann differenzierbar an der Stelle $z = \xi$, wenn die Funktionen $u(x; y)$ und $v(x; y)$ an dieser Stelle stetig differenzierbar sind und die Bedingungen

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} ; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (4.34)$$

erfüllen.

Diese Bedingungen werden als die *Cauchy-Riemannsches Differenzialgleichungen* bezeichnet. Der Beweis dieses Satzes gelingt relativ einfach durch eine geeignete

Grenzwertbetrachtung für die reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ an dieser Stelle. Eine komplexe Funktion, die an einer Stelle ξ und in einer gewissen Umgebung um diese Stelle herum,

$$U(\xi) = \{z : |z - \xi| < \delta z\} \quad (4.35)$$

differenzierbar ist, bezeichnen wir als an dieser Stelle *analytisch*. Ist sie in der gesamten Gauss-Ebene analytisch, nennen wir sie *regulär* oder *holomorph*.

Die Analytizität ist offensichtlich eine lineare Eigenschaft:

Theorem 125 *Jede Linearkombination zweier an einer Stelle ξ analytischer Funktionen ist an dieser Stelle ebenfalls analytisch.*

Mit Hilfe dieses Satzes werden wir jetzt Schritt für Schritt die Funktionen auffinden, die zur Menge der regulären Funktionen gehören. Trivialerweise ist die Identität regulär:

Theorem 126 *Die Funktion $f(z) = z$ ist eine reguläre Funktion. Der Beweis ist trivial, da für diese Funktion*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (4.36)$$

Aus diesen beiden Sätzen 125 und 126 folgt aber unmittelbar

Theorem 127 *Jede Potenzfunktion mit endlich vielen Gliedern,*

$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot z^k \quad (4.37)$$

ist eine reguläre Funktion.

Wenn wir nun zu einer Potenzfunktion mit unendlich vielen Gliedern übergehen, also zu einer Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot z^k \quad (4.38)$$

dann ist diese Funktion $f(z)$ nur im Konvergenzbereich dieser Reihenentwicklung definiert und es gilt:

Theorem 128 *Eine komplexe Funktion $f(z)$, die sich in eine Potenzreihe entwickeln lässt, ist im Konvergenzbereich der Reihenentwicklung analytisch. Den Beweis dieses Satzes findet der Leser z.B. in [30].*

Als nächstes wenden wir uns Funktionen zu, die in einem Gebiet mit Ausnahme **eines Punktes** analytisch sind und betrachten als einfachstes derartiges Beispiel die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad (4.39)$$

Der Betrag dieser Funktion steigt bei Annäherung an die Stelle $z = z_0$ über alle Grenzen,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \rightarrow \infty \quad (4.40)$$

so dass gem. der Definition 123 $f(z)$ an dieser Stelle nicht differenzierbar ist. Derartige singuläre Punkte der Nicht-Differenzierbarkeit bezeichnet man in der Funktionentheorie als *Pole*. Mit Ausnahme ihres Pols bei $z = z_0$ ist jedoch die Funktion 4.39 in der gesamten Gauss-Ebene analytisch. Daher gelten die beiden zu den Sätzen 127 und 128 analogen Aussagen:

Theorem 129 *Jede komplexe Funktion von der Form*

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(z - z_0)^k} \quad (4.41)$$

ist mit Ausnahme ihres Pols bei $z = z_0$ in der gesamten Gauss-Ebene analytisch.

Summenausdrücke von einer Form wie in der Gl. 4.41 bezeichnen wir nach dem Mathematiker und Physiker *Pierre Alphonse Laurent* (* 1813 in Paris; † 1854 ebenda) als (endliche) *Laurent-Reihe*. Häufig wird auch die noch allgemeinere Form einer Reihe, nämlich die Summe aus einem Ausdruck von der Form wie in der Gl. 4.38 und aus einem Ausdruck wie in Gl. 4.41, also ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot z^k + \sum_{l=1}^m \frac{a_l}{(z - z_0)^l} \quad (4.42)$$

als Laurent-Reihe bezeichnet. Für unendliche Laurent-Reihen gilt der Satz:

Theorem 130 *Eine komplexe Funktion $f(z)$, die sich in eine Laurent-Reihe entwickeln lässt, ist im Konvergenzbereich dieser Reihenentwicklung analytisch.*

Damit haben wir als analytische Funktionen diejenigen erkannt, die entweder aus einer endlichen Potenzreihe oder aus einer endlichen Laurent-Reihe bestehen, oder die sich in eine konvergente unendliche Potenz- oder Laurent-Reihe entwickeln lassen. Hier dokumentiert sich also eine eigenartige Strukturierung der komplexwertigen Funktionen: Sobald eine komplexwertige Funktion in einer Umgebung eines Punktes 1-mal differenzierbar ist, ist sie auch zumindest in einem Teilbereich dieser Umgebung beliebig oft differenzierbar und in eine Potenzreihe entwickelbar.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Die Ableitung komplexer Funktionen* ist noch nicht verfügbar.)

4.1.3 Die Integration komplexer Funktionen (*)

Wir wenden uns nun der Integration komplexer Funktionen zu. Da der Raum $\hat{\mathbb{C}}$ der komplexen Zahlen ein 2-dimensionaler Vektorraum ist, ist eine ähnlich einfache geometrische Zuordnung des Integrals wie im \mathbb{R}^1 , nämlich als *Fläche unter der Kurve*, nicht mehr möglich. Vielmehr steht die strukturell einfachste Integralbildung bereits in enger Analogie zu dem Linien-Integral im \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), s. Abschnitt 3.1.13, wobei das Skalarprodukt jetzt durch die Multiplikation in $\hat{\mathbb{C}}$ ersetzt ist. Wir betrachten also eine Parameterdarstellung einer Kurve C in der komplexen Ebene,

$$C : z = z(t) ; t_a \leq t \leq t_b ; t \in \mathbb{R}^1 \quad (4.43)$$

Wie im Fall des \mathbb{R}^n hat auch die in der komplexen Ebene definierte Kurve C einen *Richtungssinn*: Mit von t_a nach t_b steigendem Wert von t durchläuft der Wert $z(t)$ alle zu C gehörenden Werte, indem er bei $z(t_a)$ beginnt und bei $z(t_b)$ endet. Offensichtlich gibt es zu jeder Kurve C deren inverse Kurve $-C$, die sich von C nur durch den Richtungssinn unterscheidet. Eine (der beliebig vielen möglichen) Parameterdarstellung von $-C$ ist

$$-C : z = z(t_a + t_b - t) ; t_a \leq t \leq t_b ; t \in \mathbb{R}^1 \quad (4.44)$$

Gilt

$$z(t_a) = z(t_b) \quad (4.45)$$

bezeichnen wir die Kurve C als geschlossen. Auch eine geschlossene Kurve hat einen Richtungssinn! Als Integral einer komplexen Funktion $f(z)$ entlang der Kurve C definieren wir den Grenzwert

$$\int_C f(z) \cdot dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i) \quad (4.46)$$

$$z_i = z(t_i) ; t_1 = t_a ; t_n = t_b ; t_{i+1} > t_i$$

Die logisch saubere Konstruktion dieses Grenzwertes erfolgt völlig analog zur Vorgehensweise im Fall einer reellen Funktion durch Bildung der Ober- und Untersummen etc. . Daher nennen wir diesen Grenzwert 4.46 auch ebenfalls das *Riemann-Integral* der Funktion $f(z)$ entlang der Kurve C . Aus dieser Konstruktion folgen unmittelbar die beiden Sätze:

Theorem 131 *Jede Funktion $f(z)$, die in einem Gebiet G analytisch ist, ist Riemann-integrierbar entlang jeder Kurve C , die ganz in G liegt.*

Theorem 132 *Es gilt*

$$\int_C f(z) \cdot dz = - \int_{-C} f(z) \cdot dz \quad (4.47)$$

Etwas aufwendiger ist der Beweis der nun folgenden, als *Cauchy-Integralsatz* bekannten Aussage über das Integral einer komplexen Funktion entlang einer geschlossenen Kurve, die ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet umschließt. Darunter versteht man ein Gebiet G , bei dem das Innere einer jeden geschlossenen Kurve ganz in G liegt.

Theorem 133 *Eine komplexe Funktion $f(z)$ sei analytisch im Inneren einer geschlossenen Kurve C und stetig auf C . Das von C eingeschlossene Gebiet sei einfach zusammenhängend. Dann gilt*

$$\oint_C f(z) \cdot dz = 0 \quad (4.48)$$

(XXX: den Beweis dieses Satzes wenigstens skizzieren ähnlich wie in [31]?)

Das in Gl. 4.48 benutzte Symbol \oint werden wir durchgehend für Integrale über eine geschlossene Kurve verwenden. Aus Satz 133 zusammen mit Satz 132 folgt unmittelbar

Theorem 134 *Das Integral analytischer Funktionen ist nur von dem Anfangs- und Endpunkt der Integration abhängig und nicht von der ausgewählten Kurve C ,*

$$\int_C f(z) \cdot dz = F(z_2) - F(z_1) \quad (4.49)$$

Denn den Integrationsweg entlang einer Kurve C_2 , die dieselben Anfangs- und Endpunkte hat wie C_1 , kann man immer additiv zusammensetzen aus C_1 und der aus $-C_1$ und C_2 zusammengesetzten geschlossenen Kurve.

Wir erweitern nun die Diskussion auf den Fall, dass das Gebiet, in dem die Funktion $f(z)$ analytisch ist, mehrfach zusammenhängend ist, s. Abb. 2. Jetzt ist die Gl. 4.48 nicht mehr gültig. Wir können jedoch auf einfache Weise G wieder einfach zusammenhängend machen, indem wir nämlich an einer beliebigen Stelle eine Schnittlinie L einfügen, die die beiden nicht zu G gehörenden Bereiche der Gauss-Ebene miteinander verbindet. Sodann schließen wir diese Punktmenge L aus G aus, s. wieder Abb. 2. D.h. wir definieren ein neues Gebiet G' ,

$$G' = G - L$$

das wieder einfach zusammenhängend ist. Für jede Kurve, die ganz innerhalb von G' verbleibt, ist also die Gl. 4.48 wieder gültig! In die Abb. 2 sind die Kurven

$$C_1 : A \rightarrow B$$

$$C_2 : D \rightarrow E$$

$$C_3 : E \rightarrow F$$

$$C_4 : A \rightarrow D$$

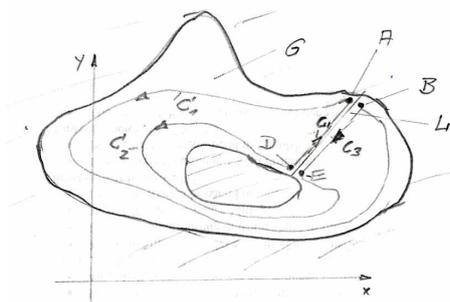


Abb. 2 Integration der in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet analytischen Funktion $f(z)$

eingezeichnet. Die beiden Punktepaare A und B sowie D und E seien von der Schnittlinie getrennt, aber nur infinitesimal voneinander entfernt,

$$|z_A - z_B| < \varepsilon ; |z_D - z_E| < \varepsilon$$

Wegen der Gl. 4.48 gilt dann

$$\oint_{C_1+C_3-C_2+C_4} f(z) \cdot dz = 0 \tag{4.50}$$

Da $f(z)$ stetig ist, gilt andererseits

$$\int_{C_3} f(z) \cdot dz = - \int_{C_4} f(z) \cdot dz \tag{4.51}$$

Also folgt

$$\int_{C_1} f(z) \cdot dz = \int_{C_2} f(z) \cdot dz \tag{4.52}$$

Die Integrale über die beiden *fast geschlossenen* Kurven C_1 und C_2 sind also einander gleich, aber nicht notwendig $= 0$. Um diesen Satz mathematisch korrekt formulieren zu können, definieren wir die *topologische Äquivalenz* von geschlossenen Kurven in \hat{C} :

Definition 135 2 vollständig im Analytizitätsbereich G einer komplexen Funktion $f(z)$ verlaufende geschlossene Kurven C_1 und C_2 heißen topologisch äquivalent, wenn sie sich durch eine Folge von jeweils ganz in G liegenden Kurven, die durch stetige Veränderungen ihrer Parameterdarstellungen gebildet werden, stetig ineinander überführen lassen.

Mit dieser Begriffsbildung lautet der Satz, dessen Beweis wir soeben skizziert haben,

Theorem 136 *Ist der Analytizitätsbereich G einer komplexen Funktion $f(z)$ mehrfach zusammenhängend, so haben deren Integrale über alle topologisch äquivalenten Kurven C_i denselben Wert.*

Als nächstes diskutieren wir den als *Cauchy-Integralformel* bekannten für viele Berechnungen fundamentalen Satz:

Theorem 137 *Eine komplexe Funktion $f(z)$ sei analytisch auf einer geschlossenen Kurve C sowie im Inneren des von C eingeschlossenen Gebietes; z_0 sei ein beliebiger Punkt aus diesem Gebiet. Dann gilt*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot f(z_0) \quad (4.53)$$

Zum Beweis dieses Satzes ist zunächst anzumerken, dass der Integrand in der Gl. 4.53 nur im Gebiet $G - z_0$ analytisch ist. Dieses ist **nicht** einfach zusammenhängend! D.h. der Cauchy-Integralsatz ist nicht anwendbar, wohl aber der Satz 136. Wir berechnen daher das Integral von $\frac{f(z)}{z - z_0}$ über einen Kreis um z_0 vom Radius r ,

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz = \oint_{C_2} \frac{f(z_0 + r \cdot e^{i\varphi})}{r \cdot e^{i\varphi}} \cdot r \cdot e^{i\varphi} \cdot i \cdot d\varphi \quad (4.54)$$

$f(z)$ aber ist auch im Punkt $z = z_0$ analytisch, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + r \cdot e^{i\varphi}) = f(z_0) \quad (4.55)$$

existiert und ist unabhängig von φ . D.h. das Integral 4.54 ergibt

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot f(z_0) \quad (4.56)$$

Wegen des Satzes 136 ergibt aber das Integral über jede topologisch äquivalente Kurve dasselbe Ergebnis, also auch das Integral über die Ausgangskurve C .

Dieses Ergebnis ist nicht nur bei extrem vielen konkreten Berechnungsaufgaben äußerst nützlich. Es ist auch von großer Tragweite für die gesamte Struktur der komplexen Funktionen. Denn es sagt aus, dass eine Funktion $f(z)$, deren Verlauf entlang einer geschlossenen Kurve C festliegt, damit bereits in seinem gesamten Verlauf innerhalb des von C eingeschlossenen Gebietes festliegt. Überdies lässt sich relativ einfach die zum Satz 137 analoge Aussage über die Berechnung der höheren Ableitungen von $f(z)$ beweisen:

Theorem 138 Eine komplexe Funktion $f(z)$ sei analytisch auf einer geschlossenen Kurve C sowie im Inneren des von C eingeschlossenen Gebietes; z_0 sei ein beliebiger Punkt aus diesem Gebiet. Dann gilt

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0) \quad (4.57)$$

Aus dem Verlauf von $f(z)$ entlang der Kurve C lässt sich also nicht nur der Funktionswert an jeder beliebigen Stelle z_0 innerhalb des von C eingeschlossenen Gebiets berechnen, sondern genauso der Wert sämtlicher Ableitungen! Eine weitere wichtige Folgerung aus diesem Verhalten besteht in dem nun folgenden Satz:

Theorem 139 Sobald 2 analytische Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auf einer Kurve C endlicher Länge übereinstimmen, sind sie miteinander identisch in dem Sinne, dass sie in jedem Punkt z_k , in dem sie beide wohl definiert sind, miteinander identisch sind,

$$f_1(z_k) = f_2(z_k) \quad (4.58)$$

Daraus wiederum folgt unmittelbar das Konzept der sog. *analytischen Fortsetzung*: Ist eine Funktion $f(z)$ als eine Reihenentwicklung um einen Punkt z_0 vorgegeben, dann ist ihre Bedeutung zunächst nur innerhalb des Konvergenzbereichs G_0 dieser Reihenentwicklung wohl definiert. Wir nehmen nun an, dass eine Reihenentwicklung derselben Funktion um einen anderen Punkt $z_1 \in G_0$ existiert, die in einem Bereich G_1 konvergent ist, der teilweise mit G_0 überlappt,

$$G_0 \cap G_1 \neq \mathbf{0} \quad (4.59)$$

der aber auch teilweise über G_0 hinaus reicht,

$$G_0 \cup G_1 > G_0 \quad (4.60)$$

Wenn nun diese 2. Reihenentwicklung in einem Teilbereich von G_0 mit der 1. Reihenentwicklung übereinstimmt, so darf man diese beiden Funktionen miteinander identifizieren, und man hat $f(z)$ auf den Konvergenzbereich der 2. Reihenentwicklung *analytisch fortgesetzt*. Im Bedarfsfall kann man diesen Prozess beliebig oft wiederholen.

4.1.4 Die Singularitäten komplexer Funktionen (-/-)

(XXX: Der Text des Abschnitts *Die Singularitäten komplexer Funktionen* ist noch nicht verfügbar.)

4.2 Mathematische Grundlagen des System-Response (-)

Das Grundkonzept der Beschreibung physikalischer Strukturen als *System* und *System-Umgebung* und der Definition einer *System-Response-Funktion* habe ich bereits im Abschnitt 2.6 vorgestellt. In dem nun folgenden Kapitel werde ich die mathematischen Begriffsbildungen skizzieren, die zum konkreten Umgang mit diesem Konzept nützlich sind. Bei dieser Darstellung werde ich nach Möglichkeit nicht zu den ausschließlich mathematischen Begriffsbildungen übergehen, sondern weiterhin die physikalischen Begriffe verwenden. Konkret benötigen wir diese Fakten in diesem Heft zur Behandlung des dielektrischen Materialverhaltens. Ich habe die Darstellung aber so gehalten, dass sie in gleicher Weise zur Diskussion anderer Response-Phänomene (magnetisches Materialverhalten, optisches Materialverhalten, Verhalten elektronischer Schaltelemente und Schaltungen, Sensoren etc.) genutzt werden kann.

Wir betrachten also im Folgenden ein physikalisches Objekt, das aus dem eigentlichen *System* besteht und der *Umgebung*, die dieses System beeinflusst. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei sogleich auf den Fall von nur jeweils **einer** von der Umgebung vorgegebenen Eingangsgröße X des Systems und **einer** Ausgangsgröße Y als Antwort des Systems. Die Response-Funktion hat dann die Struktur

$$Y = Y(X) \quad (4.61)$$

Wenn es sich als nötig erweist, wird uns die Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall

$$Y = Y(X_1; X_2; \dots) \quad (4.62)$$

i.a. ohne besondere Verständnisprobleme gelingen.

4.2.1 Linear Response, Suszeptibilität (*)

Solange wir die Eigenschaften des betrachteten physikalischen Systems nicht näher einschränken, können wir auch zu der mathematischen Struktur seiner Response-Funktion $Y = Y(X)$ keine konkreten Aussagen machen. Wir werden daher nun diese Allgemeinheit durch zusätzliche, physikalisch sinnvolle Annahmen schrittweise einschränken.

Als erstes setzen wir voraus, dass sowohl die Eingangswerte X als auch die Ausgangswerte Y dem Betrage nach beschränkt sind:

$$|X| \leq X_{\max} \quad ; \quad |Y| \leq Y_{\max} \quad (4.63)$$

Auch wenn wir hieraus alleine noch keine besonderen Schlussfolgerungen ableiten können, so wird uns diese Voraussetzung doch an verschiedenen Stellen der weiteren Vorgehensweise eine wichtige Hilfe sein.

Als zweites wollen wir uns auf Systeme beschränken, deren Response-Funktion ein noch näher zu definierendes gutartiges Verhalten zeigt. Darunter wollen wir an dieser Stelle verstehen, dass diese Funktion $Y(X)$ an jeder Stelle X_0 , die innerhalb

des durch die Gl. 4.63 definierten zulässigen Bereichs liegt, innerhalb einer gewissen Umgebung

$$X_{\min} < X_0 - \delta X < X < X_0 + \delta X < X_{\max} \quad (4.64)$$

dieses Wertes X_0 durch eine lineare Funktion

$$Y \approx Y(X_0) + \chi(X_0) \cdot (X - X_0) \quad (4.65)$$

in ausreichender Näherung approximiert werden kann. In vielen Fällen ist es dann günstig und zulässig, zu den relativen Variablen y und x überzugehen gem. den Transformationsgleichungen

$$y = \frac{Y(X) - Y(X_0)}{Y(X_0)} \quad ; \quad x = \frac{X - X_0}{X_0} \quad (4.66)$$

In diesen relativen Variablen lautet die Response-Funktion des Systems einfach

$$y = \chi(X_0) \cdot x \quad (4.67)$$

Der Proportionalitätsfaktor χ wird üblicherweise als *Suszeptibilität* bezeichnet. Um ihn von dem später für ein *ganz bestimmtes* elektrisches bzw. magnetisches Materialverhalten (Absatz S. 540 und Abschnitt 5.2.1) verwendeten Begriff der Suszeptibilität zu unterscheiden, bezeichne ich an dieser Stelle die Größe χ als die *verallgemeinerte Suszeptibilität* des betrachteten linearen Systems. Der in dieser Formulierung nicht mehr explizite auftretende Referenzwert X_0 wird meist als (der gewählte) *Arbeitspunkt* des Systems bezeichnet.

In vielen Fällen der experimentellen oder technischen Praxis ist es in der Tat zulässig, mit dieser Näherung zu arbeiten und vorauszusetzen, dass die betrachteten Systeme bei Beschränkung auf genügend kleine Änderungen ihrer Eingangsgrößen X ein lineares Response-Verhalten gem. Gl. 4.67 zeigen. Die schon wegen der Eingrenzung der zulässigen Werte gem. der Gl. 4.63 bei genügend großen Änderungen zwangsläufig auftretenden Nichtlinearitäten in der Response-Funktion äußern sich in dieser Darstellung lediglich darin, dass die verallgemeinerte Suszeptibilität χ keine Konstante ist, sondern von dem Arbeitspunkt X_0 abhängt.

Handelt es sich bei dem betrachteten physikalischen System um ein konkretes technisches Objekt, z.B. um ein optisches oder elektronisches Bauelement oder Gerät, so erhält die verallgemeinerte Suszeptibilität häufig einen eigenen Namen. Als typische Beispiele nenne ich

- den *elektrischen Widerstand* R eines elektrischen Bauelementes mit einem linearen Response zwischen dem ihm von außen aufgeprägten elektrischen Strom I als Eingangsgröße und der von ihm generierten elektrischen Spannung U als Ausgangsgröße;

- die *Empfindlichkeit* S eines Sensors oder Detektors für optische Strahlung, definiert als Quotient aus dem von ihm abgegebenen elektrischen (Ausgangs-)Signal, z.B. dem elektrischen Strom $I^{(Q)}$ und dem auf seine Empfangsfläche auftreffenden Strom $J^{(E)}$ an optischer Strahlung:

$$S = \frac{I^{(Q)}}{J^{(E)}} \quad (4.68)$$

Die Empfindlichkeit des Strahlungsdetektors hat gem. dieser Definition die Dimension $\frac{\text{elektr. Strom}}{\text{Strahlungsstrom}}$; eine bei technischen Angaben typische Einheit ist $\frac{\mu\text{A}}{\text{W}}$.

4.2.2 Nicht-instanter Linear Response (*)

Bisher war von einer Zeitabhängigkeit der Eingangs- und Ausgangsgröße nicht die Rede. D.h. wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass sich diese Größen zeitlich nicht verändern, sich das System also in einem *stationären Zustand* befindet, oder dass sich die Eingangsgröße so langsam verändert, dass das System dieser Änderung in einer Weise folgen kann, dass es sich in jedem Moment in einem stationären Zustand befindet. Treffen diese Voraussetzungen nicht mehr zu, so hängt der Wert der Ausgangsgröße y zum Zeitpunkt t nicht mehr nur vom Wert der Eingangsgröße x zu demselben Zeitpunkt t ab, sondern auch noch von den Werten, die x in der Zeit davor angenommen hatte. Im Fall des linearen Response führt dies auf die Beziehung

$$y(t) = \int_{t'=-\infty}^{t'=t} x(t') \cdot \chi(t, t') \cdot dt \quad (4.69)$$

Man kann Gl. 4.69 aber auch in der Form

$$y(t) = \int_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} x(t') \cdot \chi(t, t') \cdot dt \quad (4.70)$$

schreiben mit der zusätzlichen Bedingung

$$\chi(t, t') = 0 \quad \forall (t, t') \text{ mit } t' > t \quad (4.71)$$

Diese Bedingung 4.71 wird dann als *Kausalität* bezeichnet: Der Wert $y(t)$ hängt nicht von den Werten ab, die x in der Zukunft $t' > t$ annehmen wird. Durch die plausible und nahezu immer gültige Annahme

$$\chi(t, t') = \chi(t' - t) \quad (4.72)$$

erhält die Kausalitätsbedingung die Form

$$\chi(\Delta t) = 0 \quad \forall \Delta t > 0 \quad (4.73)$$

und die Gl.4.70 wird zu dem Ausdruck

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \cdot \chi(t' - t) \cdot dt' \quad (4.74)$$

der in der Theorie der Fourierentwicklung (s. z.B. [29]) wohl bekannt ist und als *Faltungsintegral* bezeichnet wird. D.h. $y(t)$ ist die Faltung der Eingangsfunktion $x(t)$ mit der verallgemeinerten Suszeptibilität $\chi(\Delta t)$. Eine einfache Methode zur Berechnung derartiger Faltungsintegrale werden wir im Absatz *Exponentialfunktionen* (S. 682) kennen lernen. Der im Abschnitt 4.2.1 behandelte instantane lineare Response entspricht in dieser Formulierung dem Sonderfall

$$\chi(\Delta t) = \chi \cdot \delta(0) \quad (4.75)$$

$\delta(t)$ ist die bereits im Kapitel 2.5 erwähnte Dirac-sche Deltafunktion (s. [6] des Heftes 2).

4.2.3 Frequenzabhängigkeit der linearen Suszeptibilität (*)

Wir zerlegen nun die Funktion $x(t')$ in ihre Fourierkomponenten

$$x(t') = \int_0^{\infty} x(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t'} \cdot d\omega \quad ; \quad x(\omega) \in \hat{\mathbf{C}} \quad (4.76)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t'=-\infty}^{+\infty} \int_{\omega=0}^{+\infty} x(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t'} \cdot \chi(t' - t) \cdot d\omega \cdot dt' \\ &= \int_{\omega=0}^{+\infty} x(\omega) \cdot \left\{ \int_{t'=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \cdot t'} \cdot \chi(t' - t) \cdot dt' \right\} \cdot d\omega \end{aligned} \quad (4.77)$$

Das innere Integral wird nach der Variablensubstitution $t' - t = z$ zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \cdot (z+t)} \cdot \chi(z) \cdot dz = e^{i\omega \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \cdot z} \cdot \chi(z) \cdot dz \quad (4.78)$$

Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \cdot z} \cdot \chi(z) \cdot dz = \chi(\omega) \quad (4.79)$$

ist aber nichts anderes als die (komplexwertige) Fouriertransformierte $\chi(\omega)$ der Funktion $\chi(\Delta t)$, so dass sich letztlich die Beziehung

$$y(t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} x(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} \cdot \chi(\omega) \cdot d\omega \quad (4.80)$$

ergibt, also die additive Zerlegung der Systemantwort $Y(t)$ in ihre Fourierkomponenten

$$y(\omega) = x(\omega) \cdot \chi(\omega) \quad (4.81)$$

Erfolgt die Systemanregung sinusförmig, dann gilt

$$\begin{aligned} x(\omega) &= x(\omega_0) \cdot \delta(\omega - \omega_0) \Rightarrow \\ y(t) &= x(\omega_0) \cdot e^{i\omega_0 \cdot t} \cdot \chi(\omega_0) \end{aligned} \quad (4.82)$$

D.h. die Systemantwort ist ebenfalls sinusförmig und es gilt

$$\chi(\omega_0) = \frac{y(t)}{x(\omega_0) \cdot e^{i\omega_0 \cdot t}} \quad (4.83)$$

$\chi(\omega_0)$ lässt sich also durch Messung der komplexen Systemantwort $y(t)$ (also seiner Amplitude und Phase) bestimmen, und durch stufenweise Veränderung der Anregungsfrequenz ω_0 auch die gesamte Funktion $\chi(\omega)$. Diese Funktion beschreibt das Zeitverhalten des linearen Systems vollständig. Von dieser Möglichkeit wird in der Praxis ausgiebig Gebrauch gemacht, s. z.B. Abschnitte 4.4.6 und 12.3.1. Die Diskussion des Verlaufs dieser Funktion erfolgt meist getrennt für den Realteil $\chi'(\omega)$ und den Imaginärteil $\chi''(\omega)$ von $\chi(\omega)$.

Die durch die Gl. 4.79 definierte Funktion $\chi(\omega)$ ist von ihrer physikalischen Bedeutung her nur für reellwertige Frequenzen ω erklärt. Das kann uns aber nicht daran hindern, sie als mathematisches Konstrukt in die ganze komplexe ω -Ebene fortzusetzen, indem wir die Gl. 4.79 als Definition benutzen. Dabei werden wir aber weiterhin fordern, dass die Kausalitätsbedingung 4.73 erfüllt ist. Für die auf diese Weise definierte Funktion $\chi(\omega) : \hat{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ kann nun der leistungsfähige Apparat der *mathematischen Funktionentheorie* genutzt werden (s. Abschnitte 4.1.1, 4.1.2 und 4.1.3), um einige allgemein gültige Beziehungen für $\chi(\omega)$ herzuleiten. Ich werde das an dieser Stelle nicht konkret ausführen, sondern nur einige dieser Ergebnisse angeben und kurz diskutieren. Das ist zum einen die Aussage, dass die Funktion $\chi(\omega)$ außer eventuell im Ursprung $\omega = 0$ auf der gesamten reellen ω -Achse nicht singulär wird,

$$|\chi(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \neq 0 \quad (4.84)$$

(Dies gilt sogar für den gesamten oberen Halbraum der komplexen Ebene). Dann ist die Beziehung

$$\chi'(0) = 0 \Rightarrow \chi''(\omega \rightarrow 0) \cong \frac{A}{\omega} \quad (4.85)$$

zu nennen, also eine Verknüpfung des Real- und des Imaginärteils von χ im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$. Diese Aussage folgt unmittelbar aus der für jede analytische Funktion gegebenen Möglichkeit der Entwicklung in eine kombinierte Potenz- und Laurent-Reihe (Gl. 4.42). Für genügend kleine Werte von ω dürfen wir aber diese Reihen-Entwicklung von $\chi(\omega)$ jeweils nach dem 1. Glied abbrechen,

$$\chi(\omega) \cong a \cdot \omega + \frac{A}{\omega} \tag{4.86}$$

Wie man sich durch Nachrechnen überzeugen kann, folgt daraus unmittelbar die Beziehung 4.85, die Größe $i \cdot A$ ist mit dem Entwicklungskoeffizient für das 1. Glied der Laurent-Reihe identisch.

Darüber hinausgehend lässt sich mit Hilfe der Funktionentheorie herleiten, dass der Realteil und der Imaginärteil der gesamten Funktion $\chi(\omega)$ nicht unabhängig voneinander sind, sondern über die beiden Gleichungen

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\xi)}{\xi - \omega} \cdot d\xi \tag{4.87}$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\xi)}{\xi - \omega} \cdot d\xi \tag{4.88}$$

miteinander verknüpft sind. ξ ist hierin die Integrationsvariable von der Dimension einer Frequenz, und die Integrale sind als die sog. Hauptwerte im Sinne der Funktionentheorie aufzufassen, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\xi)}{\xi - \omega} \cdot d\xi = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega - \rho} \frac{\chi'(\xi)}{\xi - \omega} \cdot d\xi + \int_{\omega + \rho}^{\infty} \frac{\chi'(\xi)}{\xi - \omega} \cdot d\xi \right\} \tag{4.89}$$

Diese Beziehungen wurden erstmals 1927 von *Hendrik Anton Kramers* (* 1894 in Rotterdam; † 1952 in Oegstgerst) und *Ralph de Laer Kronig* (* 1904 in Dresden; † 1995 in Zürich) abgeleitet (s. [3]). Dass die Integration jeweils über die gesamte reelle Frequenzachse erfolgt, also auch über die physikalisch nicht relevanten negativen Werte, braucht uns nicht weiter zu beunruhigen, denn wir können diesen Teil des Integranden problemlos in den Bereich positiver Frequenzen transformieren. Direkt aus der Definitionsgleichung 4.79 folgt nämlich

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega) \tag{4.90}$$

Auf Grund der Gl. 4.87 und 4.88 ist die Variationsbreite der real möglichen Funktionen $\chi(\omega)$ bereits signifikant eingeschränkt. Wenn sich die Funktion $\chi'(\omega)$ eines physikalischen Systems beim Übergang von einem Zustand (1) zu einem Zustand (2) (die sich z.B. in der Temperatur unterscheiden) signifikant verändert, muss

sich hierbei auch $\chi''(\omega)$ verändern, wenn auch nicht unbedingt in gleicher Weise und auch nicht in exakt demselben Frequenzbereich. Wir werden auf diese eigenartige Verknüpfung von Real- und Imaginärteil einer jeden linearen Responsefunktion noch mehrfach zurückkommen .

Wir diskutieren nun den Fall, dass die Eingangsgröße x mit der extensiven Variablen einer Energieform des Systems übereinstimmt und die Ausgangsgröße y mit der intensiven Variablen zu derselben Energieform , dass also

$$dE_i = y \cdot dx \quad (4.91)$$

(XXX: präzisieren) Dann ist die bei einer Änderung von X vom System aufgenommene Energie

$$\Delta E_i = \int y \cdot dx \quad (4.92)$$

Wir bestimmen den zeitlichen Mittelwert des Energiestroms für den Fall der sinusförmigen Anregung

$$x = x_0 \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad (4.93)$$

Hierzu verwenden wir bereits die Vorschrift für die Berechnung einer komplexwertigen Größe $\langle y \cdot x \rangle$, die wir erst im auf S. 507 folgenden Absatz *Darstellung harmonischer Schwingungen* angeben und begründen werden. Über diese Vorschrift erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_t^{t+T} y \cdot \left(\frac{dx}{dt'} \right)^* \cdot dt' \\ &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_t^{t+T} \chi(\omega) \cdot x_0 \cdot e^{i\omega \cdot t'} \cdot (-i \cdot \omega) \cdot x_0 \cdot e^{-i\omega \cdot t'} \cdot dt' \\ &= \frac{-i}{2} \cdot \omega \cdot x_0^2 \cdot \chi(\omega) = \omega \cdot \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\chi''(\omega) - i \cdot \chi'(\omega) \right) \quad (4.94) \end{aligned}$$

In dem von uns betrachteten Fall (s. Gl. 4.91) bestimmt also der **Imaginärteil** der komplexen Suszeptibilität den bei einer periodischen Anregung vom System **aufgenommenen** (und dissipierten) Energiestrom, und der Realteil $\chi'(\omega)$ bestimmt den *Blindstrom*, d.h. den periodisch gespeicherten und danach an das anregende System wieder abgegebenen Energiestrom. Ein Beispiel für diese experimentelle Situation ist die *Dynamisch-Mechanische Analyse* von Werkstoffen, bei denen einem Probekörper eine gewisse mechanische Verformung aufgeprägt und die dabei auftretende mechanische Spannung gemessen wird, s. Abschnitt 12.3.1.

In einer Reihe von anders gearteten Beispielen entspricht die Eingangsgröße X nicht der extensiven Variablen einer Energieform, sondern deren zeitlicher Ableitung,

während die Ausgangsgröße Y weiterhin mit der zugehörigen intensiven Variablen identisch ist. Um zu einem Ausdruck über die bei einem periodischen Experiment

$$x = x_0 \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad (4.95)$$

umgesetzte Energie zu gelangen, müssen wir daher nun den Weg über die Integralgröße von x gehen,

$$z = \int x \cdot dt \quad (4.96)$$

Dann gilt

$$\Delta E_i = \int y \cdot dz \quad (4.97)$$

und somit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_t^{t+T} y \cdot \left(\frac{dz}{dt'} \right)^* \cdot dt' = \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_t^{t+T} y \cdot (x)^* \cdot dt' \\ &= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_t^{t+T} \chi(\omega) \cdot x_0 \cdot e^{i\omega \cdot t'} \cdot x_0 \cdot e^{-i\omega \cdot t'} dt' = \frac{1}{2} \cdot x_0^2 \cdot \chi(\omega) \end{aligned} \quad (4.98)$$

In diesem Beispiel gilt also die zum vorher diskutierten Fall umgekehrte Zuordnung: Der **Realteil** $\chi'(\omega)$ bestimmt den vom System **aufgenommenen** (dissipierten) Energiestrom, während der **Imaginärteil** $\chi''(\omega)$ der Response-Funktion die **Blindkomponente** bestimmt. Ein typisches Beispiel für diese Situation ist die Berechnung von elektronischen Bauteilen und Baugruppen in der Elektronik (Abschnitt 14.1.2), bei der z.B. der elektrische Strom

$$J = \frac{dQ}{dt} \quad (4.99)$$

als Eingangsgröße interpretiert wird und die an dem Bauelement anliegende Spannung als Ausgangsgröße.

4.2.4 Suszeptibilität einfacher Modellsysteme (-)

Das Modellsystem mit der einfachsten zulässigen Suszeptibilitätsfunktion $\chi(\omega)$ ist das bereits im Abschnitt 4.2.1 behandelte instantan reagierende lineare System mit der Suszeptibilität

$$\chi'(\omega) = \chi_0 = \text{const.} \quad (4.100)$$

Wegen der Verknüpfungsrelation 4.88 gilt dann

$$\chi''(\omega) \equiv 0 \quad (4.101)$$

An dieser Stelle sei noch einmal betont, dass, sobald die Funktion $\chi'(\omega)$ nicht mehr konstant ist, auch $\chi''(\omega)$ nicht mehr für alle Frequenzen verschwindend klein ist.

Und umgekehrt gilt: Sobald $\chi''(\omega)$ in einem gewissen Frequenzbereich deutlich von 0 verschieden ist, kann $\chi'(\omega)$ nicht über den gesamten Frequenzbereich konstant sein. Wenn wir nun versuchen, dieses Modellsystem auf reale physikalische Systeme abzubilden, kann die Gl. 4.100 natürlich nur eine Näherung sein und zwar eine Näherung für einen gewissen nicht zu eng eingegrenzten Frequenzbereich. In diesem Frequenzbereich ist dann auch die Gl. 4.101 näherungsweise erfüllt und das reale System verhält sich dann in akzeptabler Näherung wie ein instantan reagierendes lineares System. Handelt es sich bei der Anregung des Systems um eine mechanische Deformation, bezeichnet man derartige Systeme als *ideal linear elastisch*. (s. Abschnitt 12.2.2). Insbesondere wird uns die Näherung des instantan linearen Responses bei der Behandlung von Materialeigenschaften in elektrischen und magnetischen Feldern begegnen, s. z.B. Abschnitt 4.4.4.

Ein weiteres einfaches Modellsystem ist ein solches mit einer Singularität von $\chi'(\omega)$ bei $\omega = 0$, vgl. Gl. 4.85, im einfachsten Fall von der Ordnung 1. D.h. $\chi'(\omega)$ ist von der Form

$$\chi'(\omega) = \frac{A}{\omega} \quad (4.102)$$

A ist im einfachsten Fall eine frequenzunabhängige Konstante.

(XXX: Der an dieser Stelle noch fehlende, auf das Konzept des *ideal viskosen* Systems führende Text ist noch nicht verfügbar.)

Als nächstes diskutieren wir ein System mit der Eigenschaft

$$Y = D \cdot \frac{dX}{dt} \quad (4.103)$$

D.h. das System reagiert nur auf **Änderungen** von X , während der Wert X selbst ohne Auswirkung auf die Systemantwort Y ist. Bei periodischer Anregung gem. Gl. 4.82 gilt dann offenbar

$$Y = D \cdot i \cdot \omega \cdot X \quad (4.104)$$

und die Suszeptibilität eines derartigen Systems ist einfach

$$\chi(\omega) = i \cdot \omega \cdot D \quad (4.105)$$

also rein imaginär. In der Strömungsmechanik begegnet uns ein derartiges System in Form der sog. Newtonschen Flüssigkeit. Die unabhängige Variable ist in diesem Fall die Ortskoordinate x senkrecht zur lokalen Geschwindigkeit $v(x)$, und die betrachtete abhängige Variable ist die Scherspannung τ in der Flüssigkeit. Für viele Flüssigkeiten gilt in 1. Näherung

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dx} \quad (4.106)$$

Schließlich betrachten wir noch Systeme, für die gilt

$$Y = K \cdot \int X \cdot dt \quad (4.107)$$

Bei derartigen Systemen hat also die Größe X einen ausgezeichneten Wert $X = 0$. Solange das System in einem Zustand mit $X = 0$ ist, ändert sich die Größe Y nicht. Bei periodischer Anregung gem. Gl. 4.82 gilt nun

$$Y = -\frac{i \cdot K}{\omega} \cdot X_0 \quad (4.108)$$

$$\chi(\omega) = -\frac{i \cdot K}{\omega} \quad (4.109)$$

Die Suszeptibilität auch dieses Modellsystems ist rein imaginär, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Die Antwort Y ist also gegenüber der Anregung X um $\frac{\pi}{2}$ verzögert. Außerdem wird $\chi(\omega)$ bei $\omega \rightarrow 0$ singular. Bei einem realen physikalischen Experiment äußert sich diese Singularität darin, dass man dem System bei einer Frequenz $\omega \rightarrow 0$ keine periodische Anregung mit endlicher Amplitude X_0 mehr aufprägen kann.

4.2.5 Systemantwort auf eine Sprungfunktion (-)

Die Messung der Funktion $\chi(\omega)$ liefert eine vollständige Information über das zeitabhängige Verhalten eines linearen Systems, allerdings ist diese Messung i.a. relativ aufwendig. Immerhin muss für jede Frequenz eine Messung über genügend viele Schwingungsperioden ausgeführt werden (s. wieder Abschnitt 12.3.1), um neben der Amplitude auch die Phase des Antwortsignals mit ausreichender Genauigkeit zu erhalten. Das ist insbesondere für Messungen bei tiefen Frequenzen ($1 \cdot Hz$ oder darunter) relativ zeitaufwendig. Wenn das zeitabhängige Verhalten des Systems relativ einfach strukturiert ist, so dass es durch wenige Parameter, z.B. durch nur 2 Angleichzeitkonstanten (s.u.) beschrieben werden kann, ist es wenig sinnvoll, zunächst eine ganze Funktion $\chi(\omega)$ Messpunkt für Messpunkt zu bestimmen, um danach aus ihr genau 2 Zahlen zu berechnen! Für diese Fälle wird also eine Messmethode gesucht, die über nur eine Messung direkt zu diesen Zahlen führt. Dies ist in vielen Fällen die Messung der Antwort auf eine sprungartige Änderung der Eingangsgröße, s. Abb. 3 (a). Zeigt das betrachtete System ein als *Relaxation* bezeichnetes Verhalten, wie es

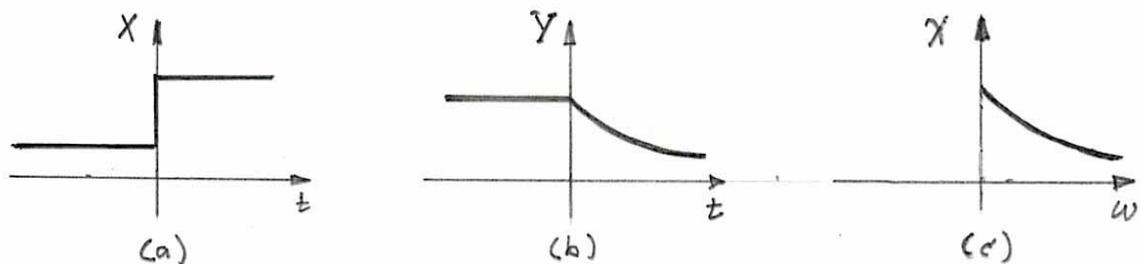


Abb. 3 Beispiel einer Zeitfunktion der Eingangsgröße X (a), einer daraus resultierenden Zeitfunktion der Ausgangsgröße Y (b) und der hierzu gehörenden frequenzabhängigen Suszeptibilität $\chi(\omega)$ (c).

in der Abb. 3 (b) angedeutet ist, so erwarten wir einen Verlauf $Y(t)$, der sich durch die Funktion

$$Y(t) = Y(t=0) - \chi_0 \cdot (X(t > 0) - X(t < 0)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4.110)$$

beschreiben lässt. Dieser Verlauf ist also durch die beiden Konstanten χ_0 (Suszeptibilität bei beliebig langsamer Änderung von X) und τ (Zeitkonstante der Relaxation des Systems) eindeutig festgelegt. Diese beiden Werte können offenbar bestimmt werden durch die Messung der Funktion $Y(t)$ nach einer sprunghaftigen Änderung von X und durch anschließenden Fit der gemessenen Funktion an die durch die Gl. 4.110 definierte Funktion. Diese als Systemantwort auf eine Sprungfunktion definierte Funktion $Y(t)$ wird in der Regelungstechnik (etwas unpräzise) als die *Übertragungsfunktion* des Systems bezeichnet, s. Absatz *Elemente eines Regelkreises* S. 1924.

Die frequenzabhängige Suszeptibilität $\chi(\omega)$ eines relaxierenden Systems (s. Abb. 3 (c)) gehorcht der Beziehung

$$XXX \quad (4.111)$$

(XXX: Diese Gl. und der sie herleitende Text sind noch nicht verfügbar.)

Wir erhalten also die gesuchten Kenndaten χ_0 und τ durch Fit der gemessenen Funktion $\chi_{\text{gem.}}(\omega)$ an die durch die Gl. 4.111 definierte Funktion oder einfach durch den Ansatz

$$\chi_0 \approx \chi_{\text{gem.}}(\omega = 0) \quad ; \quad \frac{1}{\tau} \approx \omega \left(\chi_{\text{gem.}} = \frac{\chi_{\text{gem.}}(0)}{2} \right) \quad (4.112)$$

(XXX: Der weitere, an dieser Stelle noch fehlende Text des Abschnitts *Systemantwort auf eine Sprungfunktion* ist noch nicht verfügbar.)

4.2.6 Nichtlineare Response-Funktionen (-/-)

Das Response-Konzept lässt sich problemlos auf eine nichtlineare Systemantwort erweitern, zumindest solange die Effekte als *kleine zusätzliche Störungen* aufgefasst werden können. Dann nämlich lässt sich die reale Response-Funktion $y = y(x)$ in eine Taylor-Reihe entwickeln,

$$y = \sum_i \chi_i \cdot x_i \quad (4.113)$$

und i.a. nach wenigen Gliedern abbrechen.

(XXX: Der weitere, eigentliche Text des Abschnitts *Nichtlineare Responsefunktionen* ist noch nicht verfügbar.)

4.2.7 Komplexwertige physikalische Größen (-)

Nachdem wir nun die mathematische Theorie der komplexen Zahlen und die der komplexwertigen Funktionen behandelt haben, und nachdem wir danach sogleich deren

Nutzen bei der Behandlung des System-Response erkannt haben, halte ich es für angebracht, zusammenfassend und in möglichst weit reichender Allgemeinheit zu diskutieren, unter welchen Umständen in der Physik komplexwertige Größen auftreten können bzw. dürfen, und welche konkreten Bedeutungen dann der Real- und der Imaginärteil dieser Größe jeweils haben. Wir werden dadurch auch erkennen, wann dieses Komplexwerden einer Größe **keinen** Sinn macht, und ich werde auf Beispiele hinweisen, bei denen in der Literatur dennoch des öfteren hiergegen verstoßen wird.

Darstellung von harmonischen Schwingungen (-)

Die allgemeine Beschreibung einer (1-dimensionalen) harmonischen Schwingung einer reellen physikalischen Größe (vgl. Abschnitt 3.2.3) lautet z.B.[†]

$$X = X_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (4.114)$$

Die Größe φ ist die Phasenverschiebung zwischen dieser Schwingung und einer ebenfalls harmonischen *Referenzschwingung* einer i.a. anderen reellen Größe mit derselben Frequenz ω . Mit Hilfe der Gl. 3.43 formen wir diese Gl. um in

$$\begin{aligned} X &= X_0 \cdot (\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi - \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi) \\ &= X_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t) - X_0 \cdot \sin \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \quad (4.115)$$

In dieser Formulierung besteht die harmonische Funktion 4.114 aus der additiven Überlagerung einer Sinus- und einer Cosinus-Schwingung,

$$X = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4.116)$$

wobei der Zusammenhang mit der ursprünglichen Formulierung 4.114 über die Beziehungen

$$X_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (4.117)$$

$$\tan \varphi = \frac{-A_1}{A_2} \quad (4.118)$$

gegeben ist. In der Formulierung gem. Gl. 4.116 ist die Notwendigkeit einer harmonischen Referenzschwingung vordergründig verschwunden, aber dennoch weiterhin existent: Denn nur hierüber ist in der Realität für beliebig lange Zeiten die strenge und synchrone Periodizität der Sinus- und Cosinusanteile gewährleistet bzw. definierbar. Im Grunde begegnen wir an dieser Stelle erstmals dem Begriff der *Kohärenz*, s. Abschnitt 11.1.5.

[†]Wir könnten an dieser Stelle, ohne dass sich etwas grundsätzliches ändern würde, auch die Sinusfunktion nehmen.

Wir betrachten nun 2 derartige harmonische Vorgänge

$$X^{(a)} = X_0^{(a)} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_a) \quad ; \quad X^{(b)} = X_0^{(b)} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_b) \quad (4.119)$$

und berechnen das Produkt dieser beiden Größen $X^{(a)}$ und $X^{(b)}$, die i.a. nicht dieselbe physikalische Dimension haben. Unter Verwendung verschiedener im Absatz *Ebene Trigonometrie* (ab S. 3.1.1) genannter Umrechnungsformeln erhalten wir

$$\frac{X^{(a)} \cdot X^{(b)}}{X_0^{(a)} \cdot X_0^{(b)}} = (\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_a - \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi_a) \cdot (\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi_b - \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi_b) \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot (\cos(\varphi_a - \varphi_b) + \cos(\varphi_a + \varphi_b)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot (\cos(\varphi_a - \varphi_b) - \cos(\varphi_a + \varphi_b)) \\ &\quad - \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\varphi_a + \varphi_b) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_b) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_a + \varphi_b) \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \sin(\varphi_a + \varphi_b) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_b) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi_a + \varphi_b) \quad (4.121) \end{aligned}$$

Die resultierende Funktion $Z(t)$ ist also **keine** reine harmonische Funktion mehr, sondern eine Überlagerung eines konstanten Terms mit einer harmonischen Funktion von der **doppelten** Frequenz! Bestimmen wir daher den über eine Periode

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (4.122)$$

gemittelten Wert dieser Funktion

$$\langle X^{(a)} \cdot X^{(b)} \rangle = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\frac{2 \cdot \pi}{\omega}} X^{(a)} \cdot X^{(b)} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot X_0^{(a)} \cdot X_0^{(b)} \cdot \cos(\varphi_b - \varphi_a) \quad (4.123)$$

so verbleibt dieser konstante Term als endlicher Wert. In vielen realen Beispielen ergibt sich z.B. die in einem System dissipierte Energie als Produkt zweier Größen. Bei einer harmonischen Anregung bestimmt daher die Phasendifferenz zwischen diesen beiden Größen den Wert dieser dissipierten Energie.

Als nächstes beschreiben wir nun den harmonischen Vorgang nicht mehr in Form einer Cosinus- oder Sinusfunktion, sondern in der Form

$$Z = Z_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad ; \quad Z, Z_0 \in \hat{\mathbf{C}} \quad (4.124)$$

Sowohl der momentane Wert $Z(t)$ als auch die (zeitunabhängige) Amplitude Z_0 sind also nun **komplex**! Der Exponent der e -Funktion dagegen ist rein imaginär, d.h. die Frequenz ω ist **reell**, wir dürfen sogar voraussetzen, dass

$$\omega \geq 0 \quad (4.125)$$

Der Zusammenhang zu der bisherigen Darstellung 4.114 ist durch die Gl.

$$Z_0 = A_1 + i \cdot A_2 = X_0 \cdot (\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi) = X_0 \cdot e^{-i\varphi} \quad (4.126)$$

gegeben. Die reelle Amplitude X_0 des harmonischen Vorgangs erhalten wir also durch die Operation

$$X_0 = \sqrt{Z_0 \cdot Z_0^*} \quad (4.127)$$

Sie ist identisch mit der *Länge* (Abschnitt 4.1.1) der komplexen Größe Z_0 . Die Darstellung der harmonischen Schwingung über die Gl. 4.124 entspricht also einer *analytischen Fortsetzung* der ursprünglich reellen Funktion $X(t)$ in die komplexe Ebene, wobei die ursprüngliche Funktion jeweils mit dem Realteil der neuen Funktion (Gl. 4.124) identisch ist. Solange wir uns auf lineare Operationen beschränken, also auf die Multiplikation einer derartigen Funktion $Z_0 \cdot e^{i\omega t}$ mit einer komplexen Zahl, sowie die Addition zweier derartiger Funktionen zu **derselben** Frequenz ω (!),

$$Z(t) = Z_0^{(a)} \cdot e^{i\omega t} + Z_0^{(b)} \cdot e^{i\omega t} \quad (4.128)$$

bleiben die beiden Möglichkeiten der Darstellung und Berechnung:

- der Verwendung ausschließlich reeller Funktionen und
- der Rechnung im Bereich der komplexen Funktionen

einander völlig äquivalent. Dann nämlich tritt der Ausdruck $e^{i\omega t}$ nur als gemeinsamer Faktor auf, und jede konkrete Berechnung reduziert sich auf eine Rechnung mit (zeitunabhängigen) komplexen Zahlen.

Als nächstes betrachten wir jedoch nun wieder das Produkt zweier harmonischer Größen,

$$Z^{(a)} = Z_0^{(a)} \cdot e^{i\omega t} \quad ; \quad Z^{(b)} = Z_0^{(b)} \cdot e^{i\omega t} \quad (4.129)$$

und wir interessieren uns wieder für das über eine Periode gemittelte Produkt dieser beiden Größen. Um hierfür ein analoges Ergebnis zu erhalten wie bei der Verwendung der reellen Darstellung, dürfen wir die beiden Ausdrücke nicht einfach miteinander multiplizieren. Wir orientieren uns an dem vorher diskutierten Sonderfall, bei dem diese beiden Ausdrücke identisch waren. Um die Gl. 4.127 zu erhalten, durften wir Z_0 auch nicht einfach quadrieren, sondern mussten das Produkt mit der konjugiert komplexen Größe bilden. Wir berechnen daher jetzt den Ausdruck

$$Z^{(a)} \cdot (Z^{(b)})^* = Z_0^{(a)} \cdot e^{i\omega t} \cdot (Z_0^{(b)})^* \cdot e^{-i\omega t} = Z_0^{(a)} \cdot (Z_0^{(b)})^* \quad (4.130)$$

und drücken diesen über die Gl. 4.126 mit Hilfe der Werte der reellen Darstellung aus:

$$Z^{(a)} \cdot (Z^{(b)})^* = X_0^{(a)} \cdot e^{-i \cdot \varphi^{(a)}} \cdot X_0^{(b)} \cdot e^{i \cdot \varphi^{(b)}} = X_0^{(a)} \cdot X_0^{(b)} \cdot e^{-i \cdot (\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)})} \quad (4.131)$$

Der Realteil dieses Ausdruck beträgt dann

$$X_0^{(a)} \cdot X_0^{(b)} \cdot \cos(\varphi^{(a)} - \varphi^{(b)}) \quad (4.132)$$

Wir erhalten also den korrekten Mittelwert des Produktes der beiden harmonischen Funktionen $X^{(a)}$ und $X^{(b)}$, wenn wir zu deren komplexer Darstellung übergehen, das Produkt $Z^{(a)} \cdot (Z^{(b)})^*$ bilden und dann den Realteil dieses Ausdrucks als den gesuchten Mittelwert deuten. Mit dieser Erweiterung bleibt der Kalkül der komplexen Darstellung harmonischer Funktionen auch für die Produktbildung anwendbar.

Wir haben bisher wie selbstverständlich angenommen, dass die unabhängige Variable der betrachteten harmonischen Funktionen die Zeit t ist, aber an keiner Stelle explizit davon Gebrauch gemacht. Alle erzielten Ergebnisse und Schlussfolgerungen bleiben daher in analoger Übersetzung erhalten und gültig, wenn wir t durch eine andere unabhängige Variable ersetzen, z.B. durch die Ortskoordinate x .

Wir wollen also noch einmal festhalten: Bei der Behandlung einer Klasse von harmonischen Schwingungen **einheitlicher fester Frequenz** ist die komplexe Darstellung äquivalent zur Darstellung als reellwertige Funktion. Unter Einhaltung der vorgeschriebenen Transformations- und Rechenvorschriften erhält man immer identische Ergebnisse. Voraussetzung für beide Arten der Darstellung ist gleichermaßen, dass alle betrachteten Funktionen exakt dieselbe Schwingungsfrequenz aufweisen, und dass eine für alle betrachteten Größen **einheitliche Referenzschwingung derselben Frequenz und von unbegrenzter Dauer** existiert. Denn nur dann ist die Phasenlage der betrachteten Schwingungen wohl definiert.

Komplexwertige Frequenzen (-)

Wir gehen nun zu der Situation über, bei der in der Beschreibung des Vorgangs $Z(t)$ gem. Gl. 4.124 der Exponent der e -Funktion komplex wird, die Gl. also die allgemeinere Form

$$Z = Z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega + i \cdot \varkappa) \cdot t} = Z_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-\varkappa \cdot t}; \quad Z, Z_0 \in \hat{\mathbf{C}}; \quad \omega, \varkappa \in \mathbb{R}^1 \quad (4.133)$$

annimmt. Diese geht offensichtlich wieder in die ursprüngliche Form der Gl. 4.124 über, sobald wir den Ausdruck

$$Z_{0,\text{eff.}} = Z_0 \cdot e^{-\varkappa \cdot t} \quad (4.134)$$

als jeweils relevante momentane Amplitude der Schwingung interpretieren. Der periodische Vorgang ist also nun *gedämpft*, seine Amplitude klingt exponentiell mit

der Zeit ab. Der formal vollzogene Übergang von einer reellen (positiv definiten) Frequenz zu einer komplexwertigen ist also identisch mit der Ergänzung einer Dämpfung! Damit die bereits im Absatz *Darstellung harmonischer Schwingungen* (S. 507) diskutierte Ausgangsvoraussetzung für die Eindeutigkeit der Formulierung gem. Gl. 4.114 (und damit genau so gem. Gl. 4.124) erhalten bleibt, nämlich die starre Kopplung an ein streng periodisches Referenzsignal, darf nun aber die Dämpfung nicht zu groß sein: Je größer nämlich der Wert von \varkappa wird, um so weniger Schwingungsperioden stehen real zur Analyse des Signals $Z(t)$ zur Verfügung, um so größer ist zwangsläufig die Unsicherheit bzgl. des Wertes φ . Und wie durchgängig in der gesamten Physik gehen wir auch an dieser Stelle davon aus, dass eine Größe, die grundsätzlich keiner Messung zugänglich ist, physikalisch irrelevant sein muss. Wir kommen also zu dem Schluss, dass die Darstellung eines zeitabhängigen Vorgangs gem. der Gl. 4.133 nur eine Näherung für ausreichend niedrige Dämpfungen

$$\varkappa \ll \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (4.135)$$

sein kann. Je stärker also die Bedingung 4.135 verletzt ist, um so wenig scharf ist die Phasenlage φ und auch die Frequenz ω der betrachteten Funktion definiert. Um so weniger sinnvoll und aussagekräftig sind damit auch alle Aussagen, die nur in Zusammenhang mit wohl definierten Werten dieser Größen ω und φ einen Sinn ergeben.

Als ein konkretes (meiner beruflichen Praxis entnommenes) Beispiel für eine derartige Situation nenne ich die Reflexion von optischer Strahlung an einer Grenzfläche zu einem Material extrem hoher optischer Absorption. Formal kann man dann dem Material einen komplexen Brechungsindex zuordnen, s. Abschnitt 11.2.3. Möchte man nun die Reflexion an dieser Grenzfläche durch Aufbringen einer Schicht geeigneter Dicke und Brechungsindex minimieren, so liegt es nahe, nach einem sinnvollen Wert für den Realteil des Brechungsindex des Ausgangsmaterials zu fragen. Beim Versuch, diesen Wert zu messen, wird man jedoch feststellen, dass das Messergebnis stark von dem benutzten Verfahren und den jeweiligen experimentellen Bedingungen abhängt. Die logisch korrekte Antwort auf die vordergründig einfache Fragestellung

Welcher Messwert des Brechungsindex n_{Material} ist für die
Berechnung der reflexionsmindernden Schicht einzusetzen?

lautet: Bei einem Material mit einer so starken optischen Absorption, dass die im Material sich ausbreitende optische Strahlung die Bedingung 4.135 verletzt, ist die Größe *Brechungsindex* nicht mehr wohl definiert, da ihre Definition nur für ebene ungedämpfte Wellen gültig ist. Und alle für den ungedämpften Fall berechneten Beziehungen verlieren ebenfalls ihre Gültigkeit. Um z.B. die Strahlungsverhältnisse auszurechnen, die an einem aus diesem Material und einer Deckschicht bestehenden 2-Schichtensystem auftreten, müssen die Maxwellschen Gleichungen für diesen konkreten Fall explizit gelöst werden.

Komplexwertige Suszeptibilität (-)

Den Fall komplexwertiger Suszeptibilitäten $\chi(\omega)$ haben wir bereits im Abschnitt 4.2.3 behandelt. Er tritt immer auf, wenn der Response des betrachteten Systems nicht-instantan ist, er stellt daher bei der in diesem Absatz behandelten Thematik den Normalfall dar. Es gilt jedoch auch in diesem Fall das generelle Argument, dass für das Konstrukt des frequenzabhängigen Response die Größen ω und φ wohl definiert bleiben müssen, d.h. das Verhältnis

$$\frac{\chi''(\omega)}{\chi'(\omega)} \quad (4.136)$$

darf nicht zu klein werden.

Wichtig bleibt außerdem festzuhalten, dass bereits für die Definition dieser Größe $\chi(\omega)$ die Linearität des Systemverhaltens vorausgesetzt wurde. Sobald also der Response stark nicht-linear wird, gilt es, sehr sorgfältig zu prüfen, ob die sonst üblichen Werkzeuge des linearen Response weiterhin angewandt werden dürfen.

Zusammenfassende Wertung (-)

Wie ich bereits in der Einleitung zu diesem Abschnitt angeführt habe, wird uns in der Physik häufiger die Situation begegnen, dass eine zunächst als reellwertig vorausgesetzte Größe unter bestimmten Bedingungen komplexe Werte annimmt. Es ist nützlich, dabei nicht aus den Augen zu verlieren, dass einer komplexen Größe **immer** eine Amplitude und eine Phase zugeordnet ist - und zwar jeweils **genau eine!** Es ist für das physikalische Verständnis des jeweiligen Problems also sehr hilfreich zu hinterfragen, wie denn diese Phase definiert ist. Hierzu müssen 2 sich sinusförmig ändernde Größen existieren, die um eben diese Phasendifferenz gegeneinander verschoben sind. Sobald hingegen eine dieser beiden Größen nicht mehr sinusförmig ist, also z.B. eine nicht mehr sinusförmige Antwort auf eine sinusförmige Anregung darstellt, weil nämlich das System nicht mehr als linear angenähert werden kann, hat die Größe $\chi(\omega)$ streng genommen ihre Bedeutung bereits eingebüßt. Und wenn man dann trotzdem weiterhin einen Real- und einen Imaginärteil von $\chi(\omega)$ nach den Vorschriften ausrechnet, die für den linearen Fall abgeleitet worden sind, dann sind diese Ergebnisse zunächst einmal ohne jeden verlässlichen Bezug zur Realität. Ich betone dies deshalb an dieser Stelle, weil hiergegen durchaus auch einmal verstoßen wird, auch in ansonsten durchaus ernst zu nehmender Fachliteratur ([?]).

Im Grunde ist die logische Struktur dieser Situation bereits aus der Theorie der algebraischen Gleichungen bekannt. Auch diese haben i.a. sowohl reelle wie komplexe Lösungen. Welche dieser Lösungen physikalisch sinnvoll sind, kann aus der algebraischen Gleichung alleine nicht geschlossen werden. Hierzu bedarf es zusätzlicher Überlegungen. Und wenn die Theorie, die zu diesen algebraischen Gleichungen geführt hat, für die zu berechnende Größe reelle Werte explizit verlangt, sind die

komplexen Lösungen der algebraischen Gleichung **keine** Lösungen der untersuchten physikalischen Problemstellung.

4.3 Grundfakten der Elektrostatik (-)

Wie bereits erwähnt, standen die elektrischen Naturerscheinungen mit im Zentrum des Interesses der Naturwissenschaft des ausgehenden Mittelalters. Schon die im 16. und 17. Jahrhundert durchgeführten, bereits in der Einleitung zu diesem Heft 4 (Elektrostatik) aufgezählten systematischen Experimente zur Reibungs-Elektrizität und zu der damit verbundenen neuen Wechselwirkung zwischen den Körpern zeigten:

1. Die für diese neue Wechselwirkung verantwortliche *elektrische Ladung* tritt nur gleichzeitig mit Masse auf. Ein masseloser Bereich des Universums trägt auch keine elektrische Ladung.
2. Diese Ladung kann beiderlei Vorzeichen tragen. Bei einer Vereinigung zweier mit elektrischer Ladung versehener Objekte addieren sich die Ladungen vorzeichengerecht.
3. Tragen 2 Körper elektrische Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens, tritt zwischen ihnen eine anziehende Wechselwirkung auf. Tragen die Körper Ladungen gleichen Vorzeichens, stoßen sie einander ab.

Wir verlassen an dieser Stelle den historisch korrekten Weg der Erkenntnis und behandeln zunächst, unserem Konzept einer allgemeinen dynamischen Beschreibung physikalischer Vorgänge folgend, diejenigen elektrischen Phänomene, die ohne die Berücksichtigung einer expliziten Ortsabhängigkeit der relevanten physikalischen Größen auskommen. Um Missverständnissen vorzubeugen, weise ich darauf hin, dass in dieser Beschreibung zwangsläufig gewisse Anteile der sog. *elektrischen Feldenergie*, deren Bedeutung ich an dieser Stelle noch gar nicht präzisieren kann, noch nicht enthalten sind. Erst danach werden wir die Ortsabhängigkeit dieser Wechselwirkung behandeln (und dabei eine weitgehende Analogie zur Gravitations-Wechselwirkung feststellen).

4.3.1 Die Energieform elektrische Energie (*)

Wir beschränken uns also in diesem Abschnitt auf physikalische Systeme mit einer Gibbs-Funktion, die die Ortskoordinate \vec{r} **nicht** explizit als Variable enthält. Das können zum einen die als *Phasen* bezeichneten Systeme sein, s. Abschnitt 8.1.13, die wohl räumlich ausgedehnt sind, in deren Gibbsfunktion aber nur das Volumen, jedoch nicht die Ortskoordinate \vec{r} explizit vorkommt. Zum anderen kann es sich z.B. um technische oder natürliche Objekte (z.B. Maschinen oder Wolken) handeln, deren Bewegung im Raum bei der aktuellen Betrachtung außer Acht gelassen werden

kann (soll). In der Begriffswelt der dynamischen Beschreibung derartiger physikalischer Systeme (Abschnitt 3.3) besteht die Grundaussage der Elektrostatik darin, dass zu den mechanischen (und evtl. weiteren) Energieformen die *elektrische Energie*

$$dE = U \cdot dQ \quad (4.137)$$

als relevante Energieform hinzukommt. Die zu dieser Energieform gehörende extensive Variable Q bezeichnen wir als die *elektrische Ladung* Q . Die elektrische Ladung ist eine skalare Größe, sie kann aber beiderlei Vorzeichen annehmen. Ebenso wie z.B. der Impuls und der Drehimpuls erfüllt auch sie einen Erhaltungssatz. Damit ist jede zeitliche Veränderung der elektrischen Ladung eines Objektes mit einem elektrischen Strom $J^{(Q)}$ verbunden (s. Abschnitt 3.1.13),

$$\frac{dQ}{dt} + J^{(Q)} = 0 \quad (4.138)$$

Den Strom $J^{(Q)}$ zählen wir wieder positiv, wenn er aus dem betrachteten System **herausfließt**. Diese Größe $J^{(Q)}$ werden wir meist einfach in der Form J schreiben und als (*elektrische*) *Stromstärke* bezeichnen. Ihre Einheit $1 \cdot \text{Ampère}$ bildet eine der Grundeinheiten des SI-Systems (s. Kapitel 2.1).

Wie wir später lernen werden (s. Abschnitt 4.7.4) ist die elektrische Ladung *quantisiert*, d.h. sie tritt in der Natur nur als Vielfaches einer Grundeinheit, der sog. *Elementarladung* Q_0 auf. Die in der makroskopischen Welt üblicherweise auftretenden Mengen an elektrischer Ladung sind allerdings etwa um den Faktor 10^{20} größer als Q_0 , so dass in diesem Bereich der Physik die Ladung als kontinuierlich verteilt angenommen werden darf. Sie wird als Vielfaches der aus der SI-Einheit für den elektrischen Strom abgeleiteten Einheit *Coulomb* gemessen,

$$1 \cdot \text{Coulomb} = 1 \cdot \text{Cb} = 1 \cdot \text{Ampère} \cdot 1 \cdot \text{s} \quad (4.139)$$

Die oben angeführte Elementarladung Q_0 hat in der Einheit Cb den Zahlenwert

$$Q_0 = 1,60217649 \cdot 10^{-19} \cdot \text{Cb} \quad (4.140)$$

Die in Gl. 4.137 auftretende intensive Größe U wird als *elektrisches Potenzial* bezeichnet. Sie hat die Dimension *Energie/Ladung*. Daher war es nicht nötig, auch für das elektrische Potenzial eine von den bereits definierten Größen unabhängige Definition zu vereinbaren. Vielmehr hat man sich darauf geeinigt, den Wert $1 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{Cb}}$ als Grundeinheit zu verwenden und ihn nach *Alessandro Guiseppe Antonio Anastasio Graf Volta* (* 1745 in Como; † 1827 ebenda), als $1 \cdot \text{Volt}$ zu bezeichnen,

$$1 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{Cb}} = 1 \cdot \text{V} \quad (4.141)$$

Volta leistete eine Reihe von wichtigen Beiträgen zum Verständnis elektrostatischer und elektrodynamischer Phänomene. U.a. erfand er 1783 den Plattenkondensator.

Wie bei den anderen Energieformen auch, s. z.B. Abschnitt 8.1.1, ist der Nullpunkt dieser intensiven Größe U **nicht frei** wählbar, sondern durch die Struktur seiner Gibbs-Funktionen bereits eindeutig definiert. Denn es gilt z.B.

$$U = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E(S, V, N, Q)}{\partial Q} = \frac{\partial F(T, V, N, Q)}{\partial Q} = 0 \quad (4.142)$$

Der Wert $U = 0$ definiert den Zustand des Systems, in dem diesem eine infinitesimale Menge an elektrischer Ladung zugeführt oder entzogen werden kann, ohne dass hierbei die zu dem gewählten Prozess gehörende Gibbs-Funktion ihren Wert ändert. Da die Ladung Q beiderlei Vorzeichen annehmen kann, gilt dies auch für U . Diese Aussage folgt aus dem bzgl. **jeder** ihrer extensiven Variablen konvexen Verlauf einer jeden Gibbs-Funktion (s. Abschnitt 8.1.13), so dass die Funktion $F = F(Q)$ (bei konstant gehaltenen Werten (T, V, N)) den in der Abb. 4 skizzierten Verlauf nehmen muss. D.h. es gilt

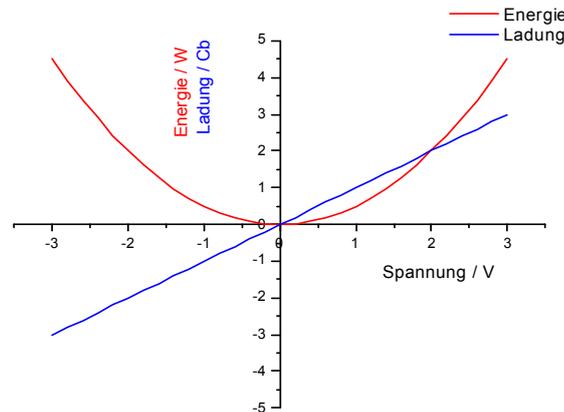


Abb. 4 Energie E und elektrische Spannung U eines Kondensators von $1 \cdot F$ als Funktion der gespeicherten Ladung Q

$$Q < 0 \Rightarrow U < 0 \quad ; \quad Q > 0 \Rightarrow U > 0 \quad (4.143)$$

Um die Ladung des Systems dem Betrage nach zu erhöhen, ist also immer ein **positiver** Energieaufwand erforderlich.

Zwischen 2 physikalischen Systemen, zwischen denen kein freier Ladungsaustausch möglich ist, herrscht i.a. eine Differenz im elektrischen Potenzial. Diese Potenzialdifferenz wird als *elektrische Spannung* bezeichnet. Wir werden hierfür ebenfalls den Buchstaben U verwenden, da i.a. aus dem Zusammenhang heraus klar ist, ob das (Absolut-)Potenzial oder eine Potenzialdifferenz gemeint ist.

Aus den beiden Einheiten für die elektrische Spannung einerseits und für die elektrische Ladung andererseits ergibt sich die der Elektrostatik angepasste Energie-

Einheit

$$\Delta E = 1 \cdot V \cdot 1 \cdot A \cdot s = 1 \cdot \text{Watt} \cdot s \quad (4.144)$$

Wegen der direkten Verknüpfung der Spannungseinheit Volt mit mechanischen Einheiten (s. Gl. 4.141) gilt aber auch

$$1 \cdot \text{Watt} \cdot s = 1 \cdot N \cdot m$$

In der Physik der (einzelnen) Atome und Moleküle, in der die elektrische Ladung Q der betrachteten Objekte maximal einige wenige Vielfache der Elementarladung Q_0 betragen kann, wird häufig eine Einheit der Energie benutzt, die direkt auf dieser Elementarladung Q_0 aufbaut. Man nennt die Energiemenge

$$\Delta E = 1 \cdot V \cdot Q_0 = 1 \cdot eV = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot W \cdot s \quad (4.145)$$

1 *Elektronenvolt* oder (im Laborjargon) 1 *e-Volt*.

Das Verhalten eines Systems, das auch elektrische Energie austauschen kann, wird z.B. durch die Gibbs-Funktion $F(T, V, N, Q)$ vollständig beschrieben. In völliger Analogie z.B. zu der bei der Energieform der mechanischen Energie geführten Diskussion können wir das elektrostatische Verhalten eines derartigen Systems durch Angabe des *elektrostatischen Objektgesetzes*, also der Funktion $U = U(Q)$ eindeutig festlegen. Überwiegend aus Gewohnheit betrachtet man meist deren Umkehrfunktion $Q = Q(U)$. Ist dieser Zusammenhang linear,

$$Q = C(T, V, N) \cdot U \quad (4.146)$$

so bezeichnen wir den Proportionalitätsfaktor C als die (elektrische) *Kapazität* des Systems. C trägt die Dimension *Ladung/Spannung*. Der Wert $\frac{1 \cdot \text{Coulomb}}{1 \cdot \text{Volt}}$ wird nach Faraday als 1 *Farad* bezeichnet und meist als 1 $\cdot F$ abgekürzt. Ich verwende ebenfalls diese Abkürzung und nehme an, dass beim Leser keine Verwirrung durch Verwechslung mit der freien Energie $F(T, V, N, Q)$ entstehen wird. Für Systeme mit einem Objektgesetz gem. Gl. 4.146 gilt

$$dF = \frac{1}{C} \cdot Q \cdot dQ \Rightarrow \quad (4.147)$$

$$\begin{aligned} F(T, V, N, Q) &= F(T, V, N, Q = 0) + \frac{Q^2}{2 \cdot C} \\ &= F(T, V, N, Q = 0) + \frac{C \cdot U}{2} \end{aligned} \quad (4.148)$$

I.a. ist die Energieform elektrische Energie von den übrigen Energieformen nicht entkoppelt, d.h. es gilt

$$\frac{\partial U(Q, X_i)}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 E(Q, X_i)}{\partial Q \cdot \partial X_i} \neq 0 \quad (4.149)$$

Dann aber ist die Kapazität C kein absolut definierter Systemparameter, sondern von dem zu seiner Bestimmung benutzten *Prozess* abhängig. Dieser Prozess kann z.B., wie in der Gl. 4.146 bereits angegeben, durch die Bedingungen

$$(T, V, N) = \text{const.} \quad (4.150)$$

definiert sein. Die auf diese Weise definierte elektrische Kapazität schreiben wir in der Form

$$C_{T,V,N} = \left(\frac{\partial F(T, V, N, Q)}{\partial Q} \right)^{-1} \quad (4.151)$$

In dieser differentiellen Form behält die Definition der Kapazität ihren Sinn, auch wenn die Linearität der Funktion $Q = Q(U)$ nicht mehr gegeben ist. Ist diese Linearität weiterhin gegeben, gilt weiterhin die Gl. 4.148, jedoch nun entlang des durch die Bedingungen 4.150 vorgegebenen Prozesses.

Ein anderer, experimentell häufiger vorliegender Prozess ist der mit

$$(T, p, N) = \text{const.} \quad (4.152)$$

Er definiert die elektrische Kapazität bei konstanten Werten von Temperatur, Druck und Teilchenanzahl,

$$C_{T,p,N} = \left(\frac{\partial G(T, p, N, Q)}{\partial Q} \right)^{-1} \quad (4.153)$$

Technische Systeme zur Speicherung von elektrischer Ladung werden als *Kondensatoren* bezeichnet, s. Abschnitt 14.2.3. Für sie ist Gl. 4.146 in sehr guter Näherung erfüllt. Die Größenordnung $1 \cdot F$ wird von ihnen i.a. nicht erreicht. Typische in elektronischen Schaltungen und Geräten eingesetzte Kondensatoren haben Kapazitäten im pF bis μF -Bereich, in den Spannungsversorgungseinheiten dieser Geräte werden Kondensatoren bis etwa $1 \cdot mF$ benötigt. Im Bereich der Leistungs-Elektrik werden heute jedoch Kondensatoren mit Kapazitätswerten bis zu $10^3 \cdot F$ eingesetzt. Bei den technischen Kondensatoren ist auch die Bedingung

$$\frac{\partial U(Q, X_i)}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 E(Q, X_i)}{\partial Q \cdot \partial X_i} = 0 \quad (4.154)$$

i.a. in sehr guter Näherung erfüllt. Dann aber ist die elektrostatische Energie von den übrigen Energieformen entkoppelt und es gilt einfach

$$F(T, V, N, Q) = F^{(0)}(T, V, N) + E_{\text{elektr.}}(Q) \quad (4.155)$$

und wegen Gl. 4.148

$$F(T, V, N, Q) = F^{(0)}(T, V, N) + \frac{Q^2}{2 \cdot C} \quad (4.156)$$

An dieser Stelle werden wir den Bereich der Elektrostatik verlassen, bei dem eine explizite Einbeziehung der Ortsabhängigkeit der elektrostatischen Größen nicht erforderlich ist, und wenden uns zunächst den von einer elektrischen Punktladung erzeugten Phänomenen zu.

4.3.2 Das elektrische Feld einer Punktladung (-)

In diesem Abschnitt behandeln wir erneut die Wechselwirkung zwischen räumlich von einander getrennten Körpern und die Bewegungen, die diese Körper auf Grund dieser Wechselwirkung ausführen. Wir setzen also die im Kapitel 3.2.10 begonnene Diskussion fort, indem wir nun zulassen, dass außer der Gravitation auch noch die durch *elektrische Ladungen* Q bedingte Wechselwirkung auftritt. Das heute nach Coulomb benannte und von ihm 1785 formulierte Gesetz über die zwischen zwei Körpern (1) und (2) mit den elektrischen Ladungen Q_1 und Q_2 zusätzlich zu der Gravitation wirkende Kraft,

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2\end{aligned}\quad (4.157)$$

war das Ergebnis sorgfältiger Experimente an makroskopischen Objekten insbesondere durch von Guericke, Cavendish, Coulomb und den Theologen und Naturwissenschaftler *Joseph Priestley* (* 1733 in Birstall b. Leeds/England; † 1804 in Northumberland/Pen.(USA)). In der Formulierung gem. Gl. 4.157 ist \vec{r} der Vektor, der vom Ort \vec{r}_2 , an dem sich der Körper (2) befindet, zum Ort \vec{r}_1 zeigt, der Position des Körpers (1). \vec{F}_1 ist die auf den Körper (1) wirkende Kraft. Haben beide Ladungen dasselbe Vorzeichen, dann weist die Kraft \vec{F}_1 in die Richtung von \vec{r} , sie versucht also den Abstand r zwischen den beiden Ladungen zu vergrößern:

$$Q_1 \cdot Q_2 > 0 \Rightarrow \vec{F}_2 * \vec{r} > 0 \quad (4.158)$$

Aus Symmetriegründen muss für die auf den Körper (2) wirkende Kraft gelten

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \quad (4.159)$$

Die Proportionalitätskonstante $4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0$ ist eine universelle Naturkonstante der Dimension $\frac{(\text{elektr. Ladung})^2}{\text{Länge}^2 \cdot \text{Kraft}}$, deren Zahlenwert von dem gewählten Maßsystem abhängt. Sie bestimmt die Stärke der elektrostatischen Wechselwirkung, indem sie die Verbindung herstellt zwischen den Mengen an elektrischer Ladung, die sich auf 2 Körpern befinden, und der Kraft, die zwischen diesen beiden Körpern auf Grund dieser Ladungen auftritt. Der genaue Zahlenwert dieser Konstanten ergibt sich jedoch erst, wenn die Einheiten der elektrischen Ladung und die der (mechanischen) Kraft unabhängig von einander festgelegt worden sind. Die Extraktion des Faktors $4 \cdot \pi$ aus dieser Konstanten ist eine Konvention, für die man sich in diesem Fall (anders als z.B. bei der Gravitations-Wechselwirkung) entschieden hat: Da bei der Verknüpfung von feldtheoretischen Größen des öfteren über Raumwinkelbereiche integriert werden muss, tritt hierbei oft ein Proportionalitätsfaktor $4 \cdot \pi$ auf, s. z.B. Gl. 3.717. Führt man ihn daher an einer Stelle (z.B. beim Coulombschen Gesetz) als Konvention zusätzlich ein, entfällt er an einigen anderen Stellen. Dass die an dieser Stelle eingeführte

Naturkonstante ε_0 in der Gl. 4.157 im Nenner steht und nicht (wie die Konstante γ des Gravitationsgesetzes 3.742) im Zähler, ist reine, historisch bedingte Willkür. Die Naturkonstante ε_0 bezeichnet man allgemein als die *Dielektrizitätskonstante des Vakuums*. Ich werde diese Formulierung ebenfalls durchgängig verwenden, obwohl ich sie für didaktisch ungeschickt halte und ε_0 eigentlich lieber schlicht als die *elektrische Feldkonstante* bezeichnen würde. Die Formulierung *Dielektrizitätskonstante des Vakuums* suggeriert nämlich, dass durch ε_0 ein *Materialverhalten* des Materials *Vakuum* beschrieben wird, so ähnlich wie durch die später (s. Abschnitt 4.4.3) auftretende relative Dielektrizitätskonstante ε_r in der Tat das elektrostatische Verhalten gewisser, als *dielektrisch* bezeichneter Materialien beschrieben wird. Dieser Interpretationsversuch ist jedoch irreführend. Wie bereits erläutert bestimmt ε_0 vielmehr die **Stärke** der elektrostatischen Wechselwirkung. Allerdings ist allein über diese Größe ε_0 ein unmittelbarer Vergleich dieser Wechselwirkungs-Stärke mit der Stärke anderer Wechselwirkungen, z.B. der Gravitation, nicht möglich, da ε_0 und die Gravitationskonstante γ völlig unterschiedliche Dimensionen tragen. Man hat daher versucht, jeweils eine mit diesen Konstanten verknüpfte dimensionslose Konstante zu finden. Für den Fall der Elektrostatik hat dies zur Definition der Größe

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{Q_0^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c_0} \quad (4.160)$$

geführt, die außer den uns bereits bekannten Größen Q_0 und c_0 noch die Naturkonstante \hbar enthält, das sog. *Plancksche Wirkungsquantum*. Diese Größe hat eine fundamentale Bedeutung für den Aufbau der Quantenmechanik, s. Heft 7. Diese dimensionslose Zahl α_{em} wird als die *Kopplungskonstante* der elektromagnetischen Wechselwirkung bezeichnet. Ihr Zahlenwert liegt sehr nahe bei der (Prim-)Zahl 137, s. hierzu auch Abschnitt 2.2. Sie ist mit der in der Theorie der Atomspektren auftretenden sog. *Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten* identisch.

Das Coulombsche Gesetz beschreibt offensichtlich, ebenso wie das Newtonsche Gravitationsgesetz (Gl. 3.667), eine *symmetrische* Wechselwirkung, wie sie im Abschnitt 3.2.5 abstrakt eingeführt wurde. Es ist ebenfalls Ausdruck einer Fernwirkung und gibt an, welche Wirkung am Ort \vec{r}_1 von der am Ort \vec{r}_2 vorhandenen Ladung Q_2 ausgeht. Ebenso wie im Falle der Gravitationswechselwirkung können wir es aber auch so umformulieren, dass die Theorie einen lokalen Charakter erhält:

$$\vec{F}_1 = \vec{\mathcal{E}}^{(Q)}(\vec{r}_1) \cdot Q_1 \quad (4.161)$$

wobei

$$\vec{\mathcal{E}}^{(Q)}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (4.162)$$

Die (vektorielle) Größe $\vec{\mathcal{E}}^{(Q)}$ bezeichnen wir als die *elektrische Feldstärke*. Sie kennzeichnet die von der elektrischen Ladung Q_2 am Ort \vec{r}_1 erzeugte elektrische Wechselwirkung und hat die Dimension $\frac{\text{Kraft}}{\text{elektr. Ladung}}$. In die Feldstärke $\vec{\mathcal{E}}^{(Q)}(\vec{r})$ geht also die

Ladung, auf die sie jeweils wirkt, **nicht** ein ! Da offensichtlich ist, dass wir innerhalb dieses Heftes 4 (Elektrostatik) ausschließlich von der *elektrischen* Feldstärke sprechen, werde ich von nun an der Einfachheit den die Art der Wechselwirkung spezifizierenden Index weglassen und statt $\mathcal{E}^{(Q)}$ einfach \mathcal{E} schreiben.

Die durch die Gl. 4.162 beschriebene Feldstärke $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ einer elektrischen Punktladung ist offensichtlich eine zentralsymmetrische, radial orientierte Vektorfunktion. Für sie gilt daher der Satz 85, also

$$\text{rot}(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})) = 0 \quad \forall \vec{r} \quad (4.163)$$

$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ ist demnach ein *konservatives Feld* und besitzt ein Potenzial

$$U(\vec{r}) : \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \neq \vec{0} \quad (4.164)$$

Wegen der Ortsabhängigkeit $U(\vec{r}) \sim r^{-1}$ ist außerhalb der Punktes $\vec{0}$, in dem die elektrische Ladung konzentriert ist, die Poisson-Gleichung (Gl. 3.420) erfüllt,

$$-\Delta U(\vec{r}) = \text{div} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0 \quad \forall r > 0 \quad (4.165)$$

Das Potenzial $U(\vec{r})$ ist wieder (s. Abschnitt 3.3.6) identisch mit dem Verhältnis aus der Energie δE , die aufgebracht werden muss, um die Ladungsverteilung des Systems an der Stelle \vec{r} um die Ladung δQ zu erhöhen, und eben dieser Ladungsänderung δQ . Um Verwirrungen in Zusammenhang mit den später behandelten Gesetzen der *Elektrodynamik* zu vermeiden, betone ich an dieser Stelle, dass die Beziehungen 4.163 und 4.164 **nicht allgemein gültig** sind. Sie wurden bis an diese Stelle auch nur für den Fall einer (ruhenden !) Punktladung bewiesen.

Wir berechnen das Potenzial U dieses Feldes gem. Gl. 3.437, legen der Einfachheit halber den Ursprung unseres Koordinatensystems an die Stelle, an der Q_2 lokalisiert ist, und berücksichtigen die Rotationssymmetrie dieses Feldes:

$$\begin{aligned} U(r) &= U(r_0) - \int_{r_0}^r \mathcal{E}(r') \cdot dr = U(r_0) - \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{r_0}^r \frac{dr'}{(r')^2} \\ &= U(r_0) + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Wir verwenden als Bezugswert den Wert $r_0 \rightarrow \infty$ und fordern, dass gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0 \quad (4.167)$$

Dann vereinfacht sich die Gl. 4.166 zu

$$U(r) = \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.168)$$

Die durch die Gl. 4.167 ausgedrückte *Eichung* des elektrischen Potentials (also die Festlegung seines Nullpunktes) ist keinesfalls eine willkürliche Entscheidung, die man genau so gut auch anders hätte treffen können. Wie wir bereits an anderer Stelle diskutiert haben (s. Abschnitt 3.3.3), liegt für **alle** intensiven Variablen, die zu einer Energieform gehören, deren Nullpunkt fest, sobald die Nullpunkte der Energie und der jeweiligen zugehörigen extensiven Variablen festliegen, hier also der Nullpunkt der elektrischen Ladung.

4.3.3 Elektrostatische Felder beliebiger Ladungsverteilungen (-)

Wir betrachten nun den allgemeineren Fall, dass im Raum mehrere elektrisch geladene Körper 2 ... n existieren, die mit einem am Ort \vec{r}_1 befindlichen und ebenfalls elektrisch geladenen Probekörper 1 wechselwirken. Dabei setzen wir voraus, dass sich diese Einzelwechselwirkungen **linear überlagern**, dass also in Erweiterung der Gl. 4.161 gilt

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^n \vec{\mathcal{E}}_i^{(Q)}(\vec{r}_1) \cdot Q_1 \quad (4.169)$$

Der Übergang von einer einzigen Punktladung zu einer endlichen Anzahl von im Raum beliebig verteilten Punktladungen hat also zu keinerlei zusätzlichen Schwierigkeiten geführt. Es gilt einfach

$$\vec{\mathcal{E}}^{(Q)}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{i=2}^n \left(\frac{Q_i}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_i) \right)$$

Wir gehen sogleich noch einen Schritt weiter bis zu dem allgemeinen Fall, bei dem die elektrischen Ladungen über ein endliches Volumen verteilt sind. Da die Ausgangsgleichung für die elektrostatische Wechselwirkung, nämlich das Coulomb-Gesetz (Gl. 4.157), bis auf das Vorzeichen völlig identisch aufgebaut ist zum Gravitationsgesetz (Gl. 3.667), sind auch alle nur darauf aufbauenden Beziehungen unmittelbar aus der Theorie der Gravitation in die Elektrostatik übertragbar. Die beiden wesentlichen Unterschiede sind jedoch immer zu beachten: Die elektrische Ladung kann beiderlei Vorzeichen annehmen, und das Vorzeichen der Wechselwirkung hat sich herumgedreht: Die zwischen 2 **gleichartig geladenen** Körpern wirkende Kraft ist **abstoßend!**

Wir definieren also in bereits bekannter Weise die *elektrische Ladungsdichte*

$$q(\vec{r}) = \lim_{\delta V_n \rightarrow 0} \frac{\delta Q_n}{\delta V_n} \quad (4.170)$$

Durch diese Funktion $q(\vec{r})$ ist die Struktur einer beliebigen Ladungsverteilung im Raum eindeutig gekennzeichnet[‡]. Aus ihr müssen daher alle weiteren elektrostatischen Größen berechenbar sein. Z.B. beträgt die in einem endlichen Volumen V

[‡]Viele Lehrbücher verwenden den Buchstaben ρ zur Kennzeichnung der elektrischen Ladungsdichte. Unserem generellen Konzept der Namensgebung von Dichten extensiver Größen folgend ist jedoch der Buchstabe q die konsequente Wahl

enthaltene elektrische Ladung

$$Q(V) = \int_V q(\vec{r}') \cdot d^3r' \quad (4.171)$$

Aus der Additivität der elektrostatischen Wechselwirkung folgt in Verbindung mit der Gl. 4.168 unmittelbar der Zusammenhang zwischen der Ladungsdichte $q(\vec{r})$ und dem elektrostatischen Potenzial $U(r)$ außerhalb des mit Ladung erfüllten Volumens,

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{V_0} \frac{q(\vec{r}')}{r} \cdot d^3r' \quad ; \quad \vec{r} \notin V_0 \quad (4.172)$$

Das Integrationsvolumen V_0 ist wieder so zu wählen, dass $q(\vec{r}')$ außerhalb dieses Volumens verschwindet,

$$q(\vec{r}') = 0 \quad \forall \vec{r}' \notin V_0 \quad (4.173)$$

Die nun folgende Berechnung des Feldes $U(\vec{r})$ durch Entwicklung des Integranden der Gl. 4.161 nach Kugelfunktionen muss für die negativen und die positiven Ladungen getrennt erfolgen. Wir verwenden also die Identität

$$q(\vec{r}') = q^{(+)}(\vec{r}') - q^{(-)}(\vec{r}') \quad ; \quad q^{(+)}(\vec{r}'), q^{(-)}(\vec{r}') \geq 0 \quad (4.174)$$

In der hier benutzten Definition bezeichnen die Funktionen $q^{(+)}(\vec{r}')$ und $q^{(-)}(\vec{r}')$ die Dichte des Betrages an positiver bzw. negativer Ladung. Das unterschiedliche Vorzeichen der Ladungen wird dann jeweils explizit in den darauf aufbauenden Gleichungen berücksichtigt. Für diese positiv definiten Teilladungsdichten gelten nun alle im Fall der Gravitation errechneten Beziehungen (Abschnitt 3.2.10) in analoger Weise. Wir berechnen wieder zunächst das sog. Außenfeld, also das Feld außerhalb von V_0 . Die Multipolentwicklung des elektrostatischen Potenzial lautet daher

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) = & \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\int_{V_0} q^{(+)}(\vec{r}') \cdot d^3r' - \int_{V_0} q^{(-)}(\vec{r}') \cdot d^3r' \right) \\ & + \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(\int_{V_0} q^{(+)}(\vec{r}') \cdot r' \cdot \cos \gamma \cdot d^3r' - \int_{V_0} q^{(-)}(\vec{r}') \cdot r' \cdot \cos \gamma \cdot d^3r' \right) \\ & + \frac{1}{r^3} \cdot \int_{V_0} \left(q^{(+)}(\vec{r}') - q^{(-)}(\vec{r}') \right) \cdot (r')^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) \cdot d^3r' - \dots \quad (4.175) \end{aligned}$$

γ ist wieder der Winkel zwischen den Ortsvektoren \vec{r} und \vec{r}' . Wegen der separaten mathematischen Behandlung der positiven und der negativen Ladungsbeiträge ist

die Definition eines Ladungsschwerpunktes und die Verwendung eines Koordinatensystems mit diesem Schwerpunkt als seinem Ursprung etwas komplexer strukturiert. Wir definieren als den Schwerpunkt der Gesamt-Ladungsverteilung den ladungsgewichteten Mittelwert der in analoger Anwendung der Gl. 3.697 separat berechneten Schwerpunkte der positiven und der negativen Ladungsverteilung, also die Größe

$$\vec{S} = \frac{Q^{(+)} \cdot \vec{S}^{(+)} + Q^{(-)} \cdot \vec{S}^{(-)}}{Q^{(+)} + Q^{(-)}} \quad (4.176)$$

Hierbei gilt

$$\vec{S}^{(+)} = \frac{\int_{V_0} q^{(+)}(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot d^3r'}{\int_{V_0} q^{(+)}(\vec{r}') \cdot d^3r'} \quad (4.177)$$

$$\vec{S}^{(-)} = \frac{\int_{V_0} q^{(-)}(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot d^3r'}{\int_{V_0} q^{(-)}(\vec{r}') \cdot d^3r'} \quad (4.178)$$

Analog wie die Dichten $q^{(+)}(\vec{r}')$ und $q^{(-)}(\vec{r}')$ kennzeichnen auch die Größen $Q^{(+)}$ und $Q^{(-)}$ die **Beträge** der gesamten positiven bzw. negativen Gesamtladung. Die bereits benutzte Gesamtladung Q errechnet sich daher gem.

$$Q = Q^{(+)} - Q^{(-)} \quad (4.179)$$

Die Definition 4.179 bleibt auch anwendbar, wenn diese beiden Größen gleich sind, der betrachtete Körper also insgesamt die elektrische Ladung Null besitzt.

Wir wollen also nun ein Koordinatensystem verwenden, dessen Ursprung mit dem Ladungsschwerpunkt \vec{S} übereinstimmt. Um nicht in mathematische Schwierigkeiten zu geraten, wählen wir das Integrationsvolumen V_0 ausreichend groß, so dass auch bei kompliziert strukturierten Ladungsverteilungen der Schwerpunkt immer innerhalb von V_0 liegt. Die Interpretation des 1. Terms in dieser Entwicklung bleibt gegenüber der Situation im Fall der Gravitation unverändert. Denn diese Integrale enthalten weiterhin keine von dem Aufpunkt \vec{r} abhängigen Terme; ihr Gesamtwert ist einfach die Gesamtladung Q des Systems. Der Beitrag des Monopol-Terms zum Potenzial beträgt daher

$$U^{(l=1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad (4.180)$$

Die Größe r in dieser Gl. ist also nun der Abstand des betrachteten Punktes von **diesem** Schwerpunkt.

Wir sind nun auch in der Lage, die Beziehung für $\nabla * \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ (Gl. 4.165) auf den allgemeinen Fall des (partiell) ladungsgefüllten Raumes ($q(\vec{r}) \neq 0$) zu erweitern.

Da die mathematische Struktur des Coulombschen Gesetzes (Gl. 4.157) mit dem Gravitationsgesetz (Gl. 3.667) identisch ist, können wir das im Absatz *Gravitationsfeld räumlich ausgedehnter Massenverteilungen* (S. 260) erzielte Ergebnis direkt übernehmen. Wir müssen nur die aus den bereits zitierten Gründen der Konvention unterschiedlichen Vorfaktoren berücksichtigen:

$$\nabla * \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q \quad (4.181)$$

Da jedoch auch die Gl. 4.164 weiterhin gültig ist, lässt sich die Gl. 4.181 auch in der Form

$$\nabla * \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \Delta U(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q(\vec{r}) \quad (4.182)$$

schreiben. Dann erkennt man unmittelbar, dass diese Gl. die für Bereiche mit nicht verschwindender Ladungsdichte geltende Erweiterung der Poisson-Gleichung (Gl. 3.420) darstellt.

Zum anderen aber können wir wegen der Additivität der elektrostatischen Wechselwirkung die zunächst nur für eine Punktladung bewiesene Gl. 4.163 unverändert für den Fall einer beliebigen (zeitunabhängigen) Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ übernehmen.

Der Übersichtlichkeit halber wiederhole ich an dieser Stelle die Grundgleichungen der Elektrostatik:

$$\operatorname{div}(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q(\vec{r}) \quad (4.183)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})) = 0 \quad (4.184)$$

Solange die als vorgegeben angesehene Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ sich nicht mit der Zeit ändert, ist daher durch deren Festlegung die durch sie erzeugte elektrische Feldstärke $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ in ihrer räumlichen Verteilung im gesamten geometrischen Raum ebenfalls fest vorgegeben. Zu ihrer Berechnung muss das durch die Gl.-en 4.183 und 4.184 gebildete System von Differenzialgleichungen gelöst werden.

Um Missverständnissen vorzubeugen, die sich an dieser Stelle leicht einschleichen können, betone ich, dass die Gl. 4.168 für jedes Koordinatensystem korrekt ist, also auch für das nun gewählte System mit dem Schwerpunkt der Gesamt-Ladungsverteilung als Ursprung. Diese Aussage gilt ebenso für die noch zu diskutierenden Gl.-en für die höheren Momente der Ladungsverteilung (s. entsprechende Erläuterungen im Absatz S. 260). Die Wahl eines Koordinatensystems mit dem gem. Gl. 4.176 definierten Schwerpunkt der Ladungsverteilung gestaltet jedoch wieder die Bestimmungsgleichungen für die verschiedenen Momente der Ladungsverteilung besonders einfach.

Eine konkrete Berechnung von $U(r)$ wird allerdings selbst für relativ einfache Ladungsverteilungen schnell aufwendig und führt i.a. nicht mehr zu analytischen Beziehungen. Es ist daher an dieser Stelle alles andere als einfach, allgemein gültige

Zusammenhänge aufzuzeigen, die bei der Behandlung konkreter Fragestellungen von Nutzen sein können. Wir werden in Ermangelung dessen im Abschnitt 4.3.5 einige besonders einfach strukturierte Beispiele konkret berechnen. Diese sollen dem Leser helfen, sich in dem Gebiet der Elektrostatik zu orientieren.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Elektrostatische Felder beliebiger Ladungsverteilungen* ist noch nicht verfügbar.)

4.3.4 Die elektrische Feldenergie (-)

Jede im Raum vorhandene Verteilung von elektrischer Ladung erzeugt also ein elektrisches Potenzial $U(\vec{r})$. Dieses gibt die Energie dE an, die erforderlich ist, um an der Stelle \vec{r} die Ladungsdichte $q(\vec{r})$ um den Wert $\frac{dq}{dV}$ zu erhöhen. Also ist zur Herstellung einer bestimmten Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ insgesamt eine gewisse Gesamtenergie E erforderlich. Die Situation steht in weitgehender Analogie zu der Situation im Fall der Gravitation. Für die gravitative Wechselwirkung haben wir diese Energie konkret berechnet (s. Abschnitt 3.3.11) und festgestellt, dass diese bis auf das Vorzeichen mit dem Ausdruck

$$\frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \gamma} \cdot \int \left(\vec{\mathcal{E}}^{(M)}(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r \quad (4.185)$$

identisch ist. Auf diese Weise haben wir das Gravitationsfeld $\vec{\mathcal{E}}^{(M)}(\vec{r})$ als dasjenige System identifiziert, mit dem bei einer Verschiebung von Massen im Raum Energie ausgetauscht wird. Für die Diskussion der elektrischen Feldenergie beschränken uns nun zunächst auf eine Ladungsverteilung $q(\vec{r})$, die ausschließlich aus Ladungselementen derselben Polarität aufgebaut ist. Dann können wir sämtliche Rechenschritte und Argumentationen aus dem Abschnitt 3.3.11 unverändert übernehmen, wenn wir nur die unterschiedlichen Vorfaktoren in den Grundgleichungen der beiden Wechselwirkungen, also in den Gl. 3.746 und 4.157, entsprechend berücksichtigen:

$$(-\gamma) \longrightarrow \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \quad (4.186)$$

Dann kommen wir zu dem Schluss, dass die zum Aufbau einer Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ erforderliche Energie identisch ist mit dem Ausdruck

$$E_{\text{el.Feld}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int \left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r \quad (4.187)$$

Dieser Ausdruck ist jedoch **positiv!** Die Lokalisierung einer endlichen Menge von (ursprünglich über das Universum verteilter) elektrischer Ladung **gleicher Polarität** auf ein endliches Volumen erfordert einen positiven Betrag an Energie. An dieser Stelle besteht also keinerlei Versuchung, eine zur (Gravitations-)Energiedichte des *Vakuums* analoge Größe in die Theorie aufzunehmen.

Wenn wir nun den Schritt wagen zu einer beliebigen, aus positiven und aus negativen Anteilen bestehenden Ladungsverteilung $q(\vec{r})$, geraten wir in eine mathematisch nicht einfach zu bewältigende Situation. Denn wir können jetzt nicht einfach

für den positiven Anteil $q^{(+)}(\vec{r})$ und den negativen Anteil $q^{(-)}(\vec{r})$ die Feldenergie separat berechnen und danach addieren, da ja die Energiedichte eine **quadratische** Funktion von \mathcal{E} ist. Ich gebe daher das Ergebnis der vollständigen Rechnung ohne Beweis an:

Theorem 140 Für jede beliebige Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ ist die zu ihrer Erzeugung erforderliche Energie gleich dem Ausdruck

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int \left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r \quad (4.188)$$

wobei $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ das von dieser Ladungsverteilung erzeugte elektrische Feld ist.

Die Integration in der Gl. 4.188 erfolgt über den gesamten Raum. Auch im Fall der elektrostatischen Wechselwirkung ist also das elektrische Feld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ dasjenige physikalische System, mit dem bei jeder Veränderung einer räumlichen Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ Energie ausgetauscht wird. Die lokale Energiedichte dieses Feldes beträgt

$$e_{\text{el.Feld}}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \right)^2 \quad (4.189)$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts berechnen wir die integrale Feldenergie einer zentralsymmetrischen homogenen Verteilung von elektrischer Ladung, also einer Kugel vom Radius R , in der elektrische Ladung mit einer konstanten Ladungsdichte $q(\vec{r})$ verteilt enthalten ist. Die Berechnung der elektrischen Feldenergie dieser Konfiguration ist völlig äquivalent zu der im Abschnitt 3.3.11 behandelten zentralsymmetrischen homogenen **Massen**verteilung, wir können daher erneut das dort erzielte Ergebnis unmittelbar übernehmen, wenn wir nur den korrekten Austausch der Feldkonstanten gem. Gl. 4.186 vornehmen. Die Gl. 3.872 wird dann zu

$$E_{\text{el.Feld}}(Q) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R} \quad (4.190)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass eine Punktladung, also ein physikalisches Objekt mit einer endlichen elektrischen Ladung Q und einem verschwindend kleinen Volumen $V \rightarrow 0$ nicht existieren kann. Denn es würde ein elektrisches Feld mit einer über alle Grenzen wachsenden Feldenergie erzeugen,

$$R \rightarrow 0 \Rightarrow E_{\text{el.Feld}}(Q > 0) \rightarrow \infty \quad (4.191)$$

Für welche realen physikalischen Objekte die Annahme einer konstanten Ladungsdichte $q(\vec{r})$ eine brauchbare Näherung darstellt, will ich an dieser Stelle noch offen lassen. Ich weise jedoch darauf hin, dass diese Näherung für makroskopische **elektrisch leitende** Objekte **nicht brauchbar** ist, s. Abschnitt 4.4.1.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Die elektrische Feldenergie* ist noch nicht verfügbar.)

4.3.5 *Einige Beispiele von Ladungsverteilungen (-)*

(XXX: Der einleitende Text des Abschnitts *Einige Beispiele von Ladungsverteilungen* ist noch verfügbar.)

Der ideale Dipol (-)

Wir betrachten also nun ein System mit einer Ladungsverteilung

$$q^{(+)}(\vec{r}') = Q \cdot \delta(0, 0, \frac{l}{2}) ; q^{(-)}(\vec{r}') = Q \cdot \delta(0, 0, -\frac{l}{2}) \quad (4.192)$$

Für diese Darstellung wurde das karthesische Koordinatensystem benutzt. Es handelt sich also um 2 als Punktladungen angenäherte lokale Konzentrationen von elektrischer Ladung (von jeweils der Absolutladung Q), die um den Abstand l voneinander getrennt sind[§]. Der Einfachheit halber haben wir den Koordinatenursprung gleich in den Schwerpunkt der Ladungsverteilung $q(\vec{r}')$ gelegt und den aus den beiden Punktladungen $+Q$ und $-Q$ gebildeten Dipol in die z -Achse orientiert. Das 2. Moment des elektrischen Potentials dieser Ladungsverteilung beträgt

$$\begin{aligned} U^{(l=2)}(\vec{r}) &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(\int_{V_0} q^{(+)}(\vec{r}') \cdot r' \cdot \cos \gamma(\vec{r}; \vec{r}') \cdot d^3 r' - \int_{V_0} q^{(-)}(\vec{r}') \cdot r' \cdot \cos \gamma(\vec{r}; \vec{r}') \cdot d^3 r' \right) \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot Q \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_+) - \cos(\gamma(\vec{r}, \vec{r}'_-)) \right) \end{aligned} \quad (4.193)$$

\vec{r}'_+ : Ortsvektor der Punktladung $+Q$
 \vec{r}'_- : Ortsvektor der Punktladung $-Q$

Diese Gl. gilt für den im Absatz S. 260 definierten Aussenbereich der Ladungsverteilung, also muss insbesondere gelten

$$|\vec{r}'| > \frac{l}{2} \quad (4.195)$$

Wir bestimmen nun den Zusammenhang zwischen den beiden in der Gl. XXX auftretenden \cos -Ausdrücken und betrachten zunächst den Fall $z > 0$.

$$\begin{aligned} z \geq 0 &\implies \cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_+) = \frac{z}{r} \\ &\implies \cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_-) = \cos \left(\pi - \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_+) \right) = -\cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_+) \end{aligned}$$

Für $z < 0$ gilt

$$\begin{aligned} z < 0 &\implies \cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_-) = \frac{-z}{r} \\ &\implies \cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_+) = \cos \left(\pi - \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_-) \right) = -\cos \gamma(\vec{r}, \vec{r}'_-) \end{aligned}$$

[§]Für die Kennzeichnung von Abständen hat sich in der Literatur keine einheitliche Kennung durchgesetzt. Ich werde an dieser Stelle die in der Elektrostatik übliche Kennung l verwenden.

Die Gl.-en XXX und XXX fassen wir zusammen zu der Form

$$U^{(l=2)}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot l}{r^{\frac{5}{2}}} \cdot |z|$$

Der Feldverlauf dieses idealen Dipols ist also durch den Wert der Größe

$$\mathfrak{M}_{el} = Q \cdot l \quad (4.196)$$

vollständig festgelegt. Wir bezeichnen sie als das *elektrische Dipolmoment* dieses Systems. Es hat die Dimension *elektrische Ladung · Länge*. Die für beliebige Ladungsverteilungen geltende Definition und Berechnungsvorschrift für das elektrische Dipolmoment werden wir bald kennen lernen.

Wir berechnen nun das elektrische Feld des idealen Dipols (s. Gl. 4.164)

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot l}{r^{\frac{5}{2}}} \right) = \frac{-Q \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \nabla \left(\frac{|z|}{r^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (4.197)$$

In Zylinderkoordinaten hat der Gradient die Form (Gl. 3.491)

$$\nabla U(\rho; \varphi; z) = \frac{\frac{\partial U(\rho; \varphi; z)}{\partial \rho}}{\rho} \cdot \frac{\partial U(\rho; \varphi; z)}{\partial \varphi} \frac{\partial U(\rho; \varphi; z)}{\partial z}$$

Wir erhalten also

$$\vec{\mathcal{E}}(\rho; \varphi; z) = -\frac{Q \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot z \cdot \rho \\ 0 \\ \rho^2 - 2 \cdot z^2 \end{pmatrix} \quad (4.198)$$

Die elektrische Feldstärke ist also immer parallel zur ρ/z -Ebene orientiert.

Wir diskutieren zunächst den Verlauf von $\vec{\mathcal{E}}$ für $z = 0$:

$$\vec{\mathcal{E}}(\rho; \varphi; z = 0) = -\frac{Q \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.199)$$

In der ρ/φ -Ebene (diese ist identisch mit der x/y -Ebene des kartesischen Koordinatensystems) verläuft $\vec{\mathcal{E}}$ immer in die negative z -Richtung. Ihr Betrag nimmt mit der 3. Potenz von ρ ab.

Als nächstes bestimmen wir den Verlauf von $\vec{\mathcal{E}}$ entlang der z -Achse, also für $\rho = 0$.

$$\vec{\mathcal{E}}(\rho = 0; \varphi; z) = +\frac{Q \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2}{|z|^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.200)$$

Entlang der z -Achse zeigt $\vec{\mathcal{E}}$ immer in die positive z -Richtung.

Ich erinnere daran, dass alle diese Beziehungen 4.198 bis 4.200 nur im Aussenfeld $r > l$ gültig sind.

Der räumlich homogene Dipol (-/-)

(XXX: Der Text des Absatzes *Der räumlich homogene Dipol* ist noch nicht verfügbar.) ist noch nicht verfügbar.)

4.4 Materie im elektrischen Feld (-)

Wir wenden uns nun den eigentlichen elektrostatischen Phänomenen zu, nämlich den Effekten, die auftreten, sobald *Materie* in ein elektrisches Feld gebracht wird. Die Grundlagen dieser Phänomene werde ich besonders ausführlich behandeln, da meiner Erfahrung nach gerade an dieser Stelle bei nahezu jedem Anfänger (und nicht nur bei ihm) besonders häufig tief gehende Verständnisprobleme auftreten. Grundkonzeption aller nun folgenden Begriffsbildungen ist die Aufteilung des betrachteten Gesamtsystems in denjenigen Teil, dessen physikalische Variablen Werte aufweisen, die **von außen** vorgegeben werden, und in den Teil, dessen Zustand **nicht unmittelbar von außen** vorgegeben wird. Die Variablen dieses Teils stellen sich vielmehr *von selbst* derart ein, dass sie gewisse Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Dieses Grundkonzept wird uns noch an vielen Stellen innerhalb dieses Buches begegnen. Die dynamischen Grundregeln, nach denen diese Ausgleichsprozesse ablaufen, haben wir bereits im Abschnitt 3.3.13 kennen gelernt.

Bevor wir uns auf diesen steinigen Weg begeben, behandeln wir noch kurz das wesentlich leichter verständliche System eines Körpers aus einem leitfähigen Material in einem elektrischen Feld. Einige der darin abgeleiteten Beziehungen werden wir nämlich danach unmittelbar benötigen.

4.4.1 Ladungsverteilung in leitenden Materialien (-)

Wir bestimmen nun die in Proben aus **elektrisch leitenden** Materialien im stationären Zustand möglichen Ladungsverteilungen. Das von der Probe eingenommene Volumen bezeichnen wir als V , und wir setzen voraus, dass es einfach zusammenhängend ist. Mit einer vorgegebenen Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ liegt aber gem. Gl. 4.181 auch die Verteilung des elektrischen Feldes $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ fest und umgekehrt. Damit ist dann auch das dem elektrostatischen Feld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ zugeordnete Potenzial $U(\vec{r})$ vorgegeben. Da jedoch in einem elektrisch leitenden Material jede endliche Potentialdifferenz $|U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)| > 0$ einen zwischen diesen beiden Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 fließenden elektrischen Strom anwirft, der seinerseits die Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ verändert, muss zwangsläufig im **stationären** Zustand gelten

$$U(\vec{r}) = U_1 \quad \forall \quad \vec{r} \in V \quad (4.201)$$

In einem Gesamtsystem aus einem elektrischen Feld und einem (oder mehreren) elektrisch leitenden Körper(n), das sich in einem stationären Zustand befindet, bildet daher **jede** Oberfläche eines elektrisch leitenden Körpers eine Äquipotenzialfläche dieses Feldes. Eine unmittelbare Folge dieser Aussage ist der Satz

Theorem 141 *In jedem Volumen V , das vollständig von einer elektrisch leitenden Hülle endlicher Dicke eingeschlossen ist, und das selbst keine elektrischen Ladungen enthält, hat die elektrische Feldstärke überall den Wert 0,*

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \in V \quad (4.202)$$

*Diese Aussage gilt unabhängig von der Feldverteilung $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ in dem restlichen Volumen **außerhalb** der genannten elektrisch leitenden Hülle.*

Alle Punkte innerhalb dieses durch die elektrisch leitende Hülle eingeschlossenen Volumens befinden sich also auf demselben elektrischen Potenzial. Der Satz 141 bildet die Grundlage für das Konzept des *Faradayschen Käfigs* sowie der elektrostatischen Abschirmung von elektrischen Leitungen für die analoge oder digitale Datenübertragung, s. Abschnitt 14.7.2: Durch die vollständig geschlossene elektrisch leitende Hülle wird das innere Volumen vollständig von den elektrostatischen Vorgängen im äußeren Volumen abgeschirmt. Es genügt sogar ein genügend engmaschiges Netz aus leitenden Stäben oder Drähten, um die abschirmende Wirkung aufrecht zu erhalten. Die Abschirmwirkung bleibt auch für sich zeitliche ändernde Felder $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}; t)$ erhalten, solange die zeitlichen Änderungen *nicht zu schnell* ablaufen. Die Frage, was diese Formulierung genau bedeutet, d.h. welches Kriterium für die Prüfung einzusetzen ist, ob die zeitlichen Änderungen noch *genügend langsam* sind, können wir mit unserem bisherigen Wissen noch nicht beantworten. Ich werde später darauf zurück kommen .

Der Satz 141 liefert uns auch das Werkzeug, um einige nützliche Beziehungen herzuleiten, die wir bisher ausgespart haben: Wir beginnen mit der Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators. Dieser besteht (im einfachsten Fall) aus 2 ebenen parallel zu einander angeordneten elektrisch leitenden Platten der Fläche A . Der Abstand der beiden Platten sei d , s. Abb. 5. Auf der einen Platte befinde sich die Gesamtladung Q und entsprechend auf der anderen Platte die Gesamtladung $-Q$. Wegen Gl. 4.201 ist im stationären Zustand des Systems das Potenzial entlang jeder dieser Platten konstant. Wegen Gl. 4.181 ist dann aber auch die auf die Fläche bezogene Ladungsdichte $q_A(x, z)$ entlang der Plattenoberfläche konstant,

$$q_A(x, z) = q = \frac{Q}{A} \quad (4.203)$$

Für das zwischen den beiden Kondensatorplatten herrschende elektrische Feld gilt dann (s. wieder Gl. 4.181)

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = (0; \mathcal{E}_y; 0) = \left(0; \frac{q}{\varepsilon_0}; 0\right) \Rightarrow \quad (4.204)$$

$$U = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q \cdot d \quad (4.205)$$

Der Zusammenhang zwischen Q und U ist offenbar linear und die Kapazität dieses Kondensators ist daher einfach

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4.206)$$

Damit folgt unmittelbar

$$C = \frac{q \cdot A}{\mathcal{E}_y \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \quad (4.207)$$

Nicht berücksichtigt haben wir bei dieser Berechnung die Tatsache, dass sich nicht nur in dem Volumen zwischen den beiden Kondensatorplatten ein elektrisches Feld bildet, sondern dass dies genau so für den übrigen Raum, also für den sog. Außenbereich der Kondensatoranordnung gilt. Auch in diesem Volumen ist elektrostatische Feldenergie gespeichert, sobald nur die beiden Kondensatorplatten eine endliche Ladung Q bzw. $-Q$ tragen. Ich werde auf diese Fragestellung im nachfolgenden Abschnitt 4.4.3 eingehen. An dieser Stelle beschränke ich mich auf den Hinweis, dass der Beitrag der im Außenbereich gespeicherten Feldenergie gegenüber der im Inneren des Kondensators gespeicherten Energie vernachlässigbar klein ist, solange nur die Plattenfläche des Kondensators genügend groß ist im Vergleich zum Plattenabstand. Genauer formuliert muss die Bedingung

$$\frac{A}{d^2} \gg 1 \quad (4.208)$$

erfüllt sein. Der Beweis dieser Aussage ist Gegenstand der Aufgabe 4.

Als nächstes berechnen wir die (gesamte) elektrostatische Feldenergie, die von einer Kugel aus elektrisch leitfähigem Material, z.B. einem Metall, erzeugt wird, wenn sie mit einer Menge Q an elektrischer Ladung beladen wird. Wegen des Satzes 141 stellt sich dabei diejenige Ladungsverteilung ein, bei der die Feldstärke $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ im Inneren der Kugel zu 0 wird. Wie man sich unmittelbar klarmacht, ist dies eine Ladungsverteilung, bei der die Gesamtladung Q in einer oberflächennahen dünnen Schicht gleichmäßig über die gesamte Oberfläche der Kugel verteilt ist. Die Dicke dieser Schicht nehmen wir für die nachfolgende Rechnung als vernachlässigbar klein im Vergleich zum Kugelradius an. Ihr Wert ergibt sich aus den Materialeigenschaften des Kugelmaterials. Wir gehen hierauf an dieser Stelle nicht näher ein, da uns hierfür noch eine Reihe von Kenntnissen aus der Festkörperphysik und der Thermodynamik fehlen. Wir legen den Ursprung des benutzten Koordinatensystems in den Mittelpunkt dieser Kugel. Dann hat das von dieser Ladungsverteilung erzeugte Feld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ die Gestalt

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \forall |\vec{r}| \geq R \quad (4.209)$$

$$= 0 \quad \forall |\vec{r}| < R \quad (4.210)$$

und die gesamte Feldenergie beträgt

$$\begin{aligned}
 E_{\text{el.Feld}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_{\text{ges.Raum}} \left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_{r=R}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \right\}^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \\
 &= \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R}
 \end{aligned} \tag{4.211}$$

Fassen wir dieses System der geladenen Metallkugel als ein makroskopisches Objekt auf, das Energie in Form von elektrischer Energie

$$dE = U \cdot dQ \tag{4.212}$$

mit anderen Systemen austauschen kann, dann ist offenbar

$$\frac{dE}{dQ} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R} = U \tag{4.213}$$

die zugehörige intensive Variable, die elektrische Spannung U , und diese ist eine lineare Funktion von Q . Gem. Gl. 4.145 ist daher

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R \tag{4.214}$$

nichts anderes als die Kapazität dieses *Kugelkondensators*. Das Innere der Metallkugel ist bei dieser Anordnung ohne Funktion. Daher können wir das in ihm enthaltene Material auch entfernen, ohne dass sich in dem elektrostatischen Verhalten eine Veränderung zeigt. Gl. 4.153 gibt also ebenfalls die Kapazität einer metallischen **Hohlkugel** an. Wir wollen diese Aussage präzisieren: Das von uns betrachtete System eines Kugelkondensators besteht nicht nur aus der elektrisch leitenden Kugelschale, sondern auch noch aus der sog. *Gegenelektrode*, einer der Einfachheit halber als ebenfalls elektrisch leitend anzunehmenden Fläche, die sich auf dem elektrischen Potenzial $U = 0$ befindet. Die Kapazität dieses Systems ergibt sich aus der Gl. XXX streng genommen erst dann, wenn diese beiden Kugelschalen konzentrisch positioniert sind und der Radius der Gegenelektrode beliebig groß ist. Bei einer endlich großen, z.B. planaren Gegenelektrode der Kantenlänge $a \gg R$ in einem Abstand $d \gg R$ zur Kugelschale ist diese Gl. jedoch auch bereits eine gute Näherung für die Kapazität dieses Systems.

(XXX: die nachfolgende Textpassage entfernen ?)

Zum Abschluss dieses Abschnitts berechnen wir die integrale Feldenergie einer Ladungsverteilung, die durch einen einzigen Dipol angenähert werden kann, einer Ladungsverteilung also mit folgenden Eigenschaften:

- Sie besteht aus 2 Teilladungen Q_1 und Q_2 , die sich nur in ihrem Vorzeichen unterscheiden,

$$Q_1 = Q = -Q_2 \tag{4.215}$$

- Die beiden Teilladungen Q_1 und Q_2 befinden sich beide jeweils auf einer elektrisch leitenden Kugel vom Radius R .
- Diese beiden Metallkugeln sind derart fixiert, dass der Abstand der Kugelmittelpunkte Δr beträgt und die Kugeln einander nicht berühren (oder gar durchdringen). D.h. es gilt $\Delta r > 2 \cdot R$.

Zur Berechnung der gesuchten Größe

$$E_{\text{el.Feld}}(Q, \Delta r) \quad (4.216)$$

betrachten wir zunächst die Feldenergie für die Konfiguration, in der die Ladung Q_2 noch nicht vorhanden ist. Diese Energie ergibt sich unmittelbar über die Gl. 4.211. Ergänzen wir nun die Ladung Q_2 , positionieren sie aber zunächst in einem Abstand $\Delta r \rightarrow \infty$ von Q_1 , so erzeugt diese Ladung ebenfalls ein elektrisches Feld mit der Feldenergie gem. Gl. 4.211. Insgesamt gilt daher

$$E_{\text{el.Feld}}(Q, \Delta r \rightarrow \infty) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R} \quad (4.217)$$

Das elektrostatische Potenzial U des von der Ladung Q_1 erzeugten Feldes beträgt für ausreichend große Werte von r (Gl. 4.168)

$$U(r) = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \text{ für } r > R \quad (4.218)$$

Wenn man nun den Schwerpunkt der Ladung Q_2 bis auf einen Abstand Δr an den Schwerpunkt der Ladung Q_1 heranbringt, ändert sich daher die Energie des Gesamtsystems um

$$\Delta E_{\text{el.Feld}} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\Delta r} = -\frac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\Delta r} \quad (4.219)$$

so dass die Feldenergie des durch diese Ladungsverschiebung entstandenen Dipolfeldes den Wert

$$E_{\text{el.Feld}}(Q, \Delta r) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q^2}{R} - \frac{Q^2}{\Delta r} \right) = \frac{Q^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(1 - \frac{R}{\Delta r} \right) \quad (4.220)$$

annimmt. Durch die Annäherung der Ladung Q_2 an die Ladung Q_1 nimmt also die integrale Feldenergie maximal bis auf die Hälfte ihres Ausgangswertes ab,

$$E_{\text{el.Feld}}(Q, \Delta r \rightarrow \infty) = 2 \cdot E_{\text{el.Feld}}(Q, \Delta r \gtrsim 2 \cdot R) \quad (4.221)$$

Die durch die Gl. 4.220 definierte Funktion $E_{\text{el.Feld}}(Q)$ hat wieder die Form

$$E_{\text{el.Feld}}(Q) = \frac{Q^2}{2 \cdot C} \quad (4.222)$$

Eine Anordnung aus 2 (z.B) gleich großen Metallkugeln hat daher eine wohl definierte (elektrische) Kapazität, nämlich

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}{\left(1 - \frac{R}{\Delta r}\right)} \quad (4.223)$$

Ich weise allerdings darauf hin, dass die von mir gewählte Vorgehensweise, um zu der Gl. 4.220 und den daraus geschlossenen Folgerungen zu gelangen, wohl relativ leicht nachvollziehbar ist, aber nur eine Näherung für genügend große Werte von Δr darstellt, genauer für

$$\frac{\Delta r}{R} \gg 1 \quad (4.224)$$

Denn wir haben nicht berücksichtigt, dass sich bei der Annäherung der beiden geladenen Kugeln auch die Ladungsverteilung auf diesen Kugeln verändert. Es bleibt wohl weiterhin für das Innerer beider Kugeln die Bedingung 4.202 erhalten, sie gilt aber jetzt für das von beiden Ladungsverteilungen $q_1(\vec{r})$ und $q_2(\vec{r})$ **insgesamt** erzeugte Feld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$.

(XXX: Der an dieser Stelle noch vorgesehene weitere Text ist noch nicht verfügbar.)

4.4.2 Polarisierbare Materialien (-)

Wir wenden uns nun Systemen zu, die insgesamt keine elektrische Ladung tragen, und die auch in keinem ihrer Teilvolumenelementen elektrische Ladung tragen, zumindest solange diese Volumenelemente noch ausreichend groß sind, um sie mit den Methoden der Kontinuumsphysik behandeln zu können. Für das gesamte betrachtete Volumen gilt daher

$$q(\vec{r}) = 0 \implies Q = 0 \quad (4.225)$$

Auf submikroskopischer Längenskala können jedoch elektrische Dipole existieren mit einem endlichen Dipolmoment $\vec{\mathfrak{M}}_{el}$. Wir entledigen uns der Schwierigkeiten bei dem Übergang von der submikroskopischen zur makroskopischen Betrachtungsweise, indem wir sofort zu den auf das Volumen bezogenen Größen und Einheiten übergehen. Wir definieren die Größe

$$\vec{\mathfrak{m}}_{el}(\vec{r}) = \lim_{\delta V_n \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{\mathfrak{M}}_{el,n}(\vec{r})}{\delta V_n(\vec{r})} \quad (4.226)$$

und bezeichnen sie als die volumenbezogene *Dichte des elektrischen Dipolmomentes* an der Stelle \vec{r} . Materialien mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als elektrisch polarisierbar.

Die von mir gewählte Kennzeichnung $\vec{\mathfrak{m}}_{el}$ für diese Größe entspricht wohl der von mir in diesem Lehrbuch gewählten Systematik für die Kennzeichnung extensiver Größen und ihrer (z.B. volumenbezogenen) Dichten. Sie ist jedoch in der naturwissenschaftlichen Literatur völlig ungebräuchlich. Vielmehr wird die Dichte

des elektrischen Dipolmomentes in der Literatur ganz überwiegend als *Polarisation* bezeichnet und durch den Großbuchstaben P gekennzeichnet. Ich finde diese Wahl extrem bedauerlich, zumal das Wort *Polarisation* bereits für eine der grundlegenden Eigenschaften elektromagnetischer Strahlung vergeben ist (s. Abschnitt 11.1.3), die mit der hier behandelten physikalischen Größe in keinerlei logischem Zusammenhang steht. Aus didaktischer Sicht ist diese Wahl geradezu eine Katastrophe und wahrscheinlich häufig Anlass für tiefgehende Verständnisprobleme und das wieder einmal nicht nur bei Anfängern.

Um meine Leser nicht unnötig zu irritieren, werde ich gelegentlich nochmals darauf hinweisen, dass es sich bei der von mir mit $\vec{\mathbf{m}}_{el}$ gekennzeichneten Größe um in der Literatur überwiegend mit dem Buchstaben P gekennzeichnete Größe handelt.

Der Polarisationszustand eines Systems aus elektrisch polarisierbarem Material wird durch die Funktion

$$\vec{\mathbf{m}}_{el}(\vec{r}) \tag{4.227}$$

eindeutig vorgegeben. Jedes Volumenelement dV des von dem Material erfüllten Volumens V erzeugt nun ein elektrisches Feld (s. Gl. 4.198)

$$\vec{d\mathcal{E}}(\rho; \varphi; z) = -\frac{\vec{\mathbf{m}}_{el}(\vec{r})}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot \begin{matrix} 3 \cdot z \cdot \rho \\ 0 \\ \rho^2 - 2 \cdot z^2 \end{matrix} \cdot d^3r \tag{4.228}$$

Diese Gl. gilt in dem Zylinderkoordinatensystem, das den Aufpunkt \vec{r} als Koordinatenursprung benutzt und dessen z -Achse parallel und gleich orientiert zur Dipolmomentendichte $\vec{\mathbf{m}}_{el}(\vec{r})$ in diesem Aufpunkt ist. Für eine Integration des Ausdrucks über das Probenvolumen V ist diese Darstellung jedoch ungeeignet. Wir müssen daher die Gl. 4.228 in ein besser geeignetes Koordinatensystem transformieren. In einem 1. Schritt gehen wir zu einem Zylinderkoordinatensystem über, dessen Orientierung im Raum für alle Aufpunkte \vec{r} identisch ist. Der Koordinatenursprung ist jedoch weiterhin mit dem Aufpunkt identisch. Die hierfür geltende Transformationsbeziehung lautet

$$\vec{r}^* = (\rho^*; \varphi^*; z^*) = \begin{matrix} XXX \\ \bullet \\ z \end{matrix} \begin{matrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{matrix} \tag{4.229}$$

und die Gl. 4.228 wird zu

$$\vec{d\mathcal{E}}(\rho; \varphi; z) = -\frac{\vec{\mathbf{m}}_{el}(\vec{r})}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot XXX \tag{4.230}$$

In einem 2. Schritt gehen wir zu einem Zylinderkoordinatensystem über, dessen Koordinatenursprung im Raum für alle Aufpunkte \vec{r} ebenfalls identisch ist. Die hierfür geltende Transformationsbeziehung lautet

$$XXX \tag{4.231}$$

und die Gl. 4.230 wird zu

$$\text{XXX} \quad (4.232)$$

Im 3. Schritt gehen wir zu einem kartesischen Koordinatensystem über, lassen hierbei aber die Referenzebene und den Koordinatenursprung unverändert. Dem entspricht die Transformationsgleichung

$$\text{XXX} \quad (4.233)$$

und wir erhalten die Gl.

$$\text{XXX} \quad (4.234)$$

Integrieren wir diese Gl. über das Probenvolumen V , so erhalten wir die Gl. für das von der Probe erzeugte elektrische Feld:

$$\mathcal{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \int_V \vec{m}_{el}(\vec{r}') \cdot \text{XXX} \cdot d^3r' \quad (4.235)$$

Aus den von uns formulierten Annahmen folgt unmittelbar, dass im gesamten Raum die Gl.

$$\text{div } \mathcal{E}(\vec{r}) = 0$$

erfüllt ist. Ausserdem folgt aus der Gl. 4.235, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\vec{r}) = 0$$

Also existiert ein dem Feld $\mathcal{E}(\vec{r})$ zugeordnetes Vektorfeld $A(\vec{r})$ mit der Eigenschaft

$$\text{rot}(A(\vec{r})) = \mathcal{E}(\vec{r})$$

Dieses Vektorpotenzial können wir über die Beziehung

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{m}_{el}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \text{XXX} \cdot d^3r'$$

berechnen. Der Beweis dieser Behauptung gelingt durch Nachrechnen: Aus der Gl. XXX folgt

$$\text{rot}(A(\vec{r})) = \text{XXX}$$

(XXX: Der hierzu gehörende Text ist noch nicht verfügbar.)

(XXX: Text hier fortsetzen und mit der nachfolgenden Textpassage abgleichen.)

Abschließend stelle ich eine wichtige und grundsätzliche Problematik heraus, die in der bis hierher dargestellten Struktur der Theorie der Elektrostatik enthalten ist: Ausgangspunkt unserer Überlegungen war das Modell einer *Punktladung*, eines Objektes von vernachlässigbarer räumlicher Ausdehnung, aber mit endlicher

elektrischer Ladung Q . Der Einbezug der elektrischen Feldenergie in unsere Betrachtungen zeigte dann, dass dieses Konzept *unphysikalisch* ist, d.h. real nicht existieren kann. Denn jede Punktladung hätte eine unendlich große elektrische Feldenergie. Erst die Begrenzung der räumlichen Ausdehnung zu kleinen Werten hin befreit uns von diesem Problem. Das bedeutet aber andererseits, dass jede Berechnung eines physikalischen Objektes, die wir in der Weise ausführen, dass wir dieses Objekt gedanklich aus derartigen Punktladungen aufbauen, nicht zwangsläufig zu einem korrekten Ergebnis führt. Vielmehr muss immer zusätzlich geprüft werden, ob diese Reihenfolge der Grenzübergangsprozesse

- zunächst der Grenzübergang zu den Punktladungen und
- dann alle weiteren Berechnungen incl. der darin enthaltenen Grenzübergangsprozesse

zulässig war. Eine ganz analoge Argumentation gilt für das Konzept des *idealen elektrischen Dipols*. Dieser entsteht z.B. aus der Annahme 2-er Punktladungen der Ladung Q bzw. $-Q$ (die für sich genommen schon unphysikalisch sind), die zunächst auf einem endlichen Abstand $\vec{\Delta r}$ gehalten werden. Ihnen wird dann das elektrische Dipolmoment $\vec{P} = Q \cdot \vec{\Delta r}$ zugeordnet. Danach wird in einem Gedankenprozess der Betrag des Abstandsvektors auf beliebig kleine Werte erniedrigt und die (Teil-)Ladung im gleichen Schritt dem Betrage nach derart erhöht, dass das Dipolmoment \vec{P} konstant bleibt. Die sich im Grenzfall $\Delta r \rightarrow 0$ einstellende Feldverteilung nennt man dann die des *idealen elektrischen Dipols*. Dieses Objekt *idealer elektrischer Dipol* des Dipolmomentes \vec{P} ist gleich in mehrfachem Sinne unphysikalisch: Bereits die 2 Punktladungen haben jede für sich genommen eine unendlich große Feldenergie. Lässt man jedoch diese 1. Idealisierung fallen und rechnet mit kugelförmigen Ladungen endlichen Volumens, dann ist mit zunehmender Annäherungen dieser beiden Objekte an einander ein immer größerer Anteil der Feldenergie im Nahbereich zwischen diesen beiden Objekten konzentriert. D.h. die Energie in diesem Bereich wächst bei dem Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ über alle Grenzen. Der Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ ist daher nicht mehr logisch sauber durchführbar. Der sog. *ideale elektrische Dipol* ist daher ein **unphysikalisches** Objekt. Das zeigt sich insbesondere auch daran, dass die für ihn berechnete Feldverteilung $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ die Bedingung

$$\oint_{\mathfrak{S}} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) * d\vec{s} = 0 \quad (4.236)$$

nicht mehr für jede beliebige Kurve \mathfrak{S} erfüllt ist. Jede konkrete Berechnung, die auf diesem Konzept des idealen elektrischen Dipols aufbaut, führt daher ebenfalls nicht zwangsläufig zu einem korrekten Ergebnis. Auch hier muss in jedem Einzelfall kritisch geprüft werden, ob diese Vorgehensweise (ausnahmsweise!) zulässig ist.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *polarisierbare Materialien* ist noch nicht verfügbar.)

4.4.3 Das Gesamtsystem aus Materie und elektrischem Feld (-)

Wir betrachten also nun ein physikalisches System, das aus 2 Teilen besteht, einem 1. Teil, der ein bestimmtes elektrisches Feld $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ erzeugt (vorgibt), und einem 2. Teil, der ebenfalls in der Lage ist, eine Ladungsverteilung $q(\vec{r}) \neq 0$ zu erzeugen und damit auch ein elektrisches Feld $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}) \neq 0$. Diese Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ wird jedoch nicht *vorgegeben*, sondern tritt als *Folge* davon auf, dass sich dieser 2. Teil im Feld $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ befindet. Den 1. Teil bezeichnen wir als das *felderzeugende System* oder als das *äußere Feld* und den 2. Teil als die in diesem Feld befindliche *Probe*. Diese Probe füllt ein bestimmtes endliches Volumen V vollständig aus und besteht aus einem wohl bestimmten Material. Das Gesamtfeld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ ergibt sich dann als Summe dieser beiden Felder,

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}) \quad (4.237)$$

Die Feldverteilung $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r})$ resultiert aus der Ladungsverteilung $q(\vec{r})$ innerhalb der Probe. Sie kann jedoch nicht beliebige Funktionsverläufe annehmen, sondern unterliegt einer Reihe von einschränkenden Bedingungen. Zum einen setzen wir eine Ladungsneutralität der Probe als ganze voraus,

$$\int_V q(\vec{r}) \cdot d^3r = 0 \quad (4.238)$$

Die Integration erfolgt über das vom Material erfüllte Volumen V . Zum anderen wollen wir die Diskussion an dieser Stelle auf *elektrisch nichtleitende Materialien* beschränken, die also keinen Ladungstransport über makroskopische Entfernungen gestatten. Dann aber gilt die Ladungsneutralität nicht nur global, sondern auch lokal, also für jedes im Sinne der Kontinuums-Physik (Abschnitt 3.1.13) infinitesimale Volumenelement δV , und es verschwindet daher innerhalb des Materials die Dichte des 1. Moments der Ladungsverteilung

$$\mu^{(1)}(\vec{r}) = 0 \quad (4.239)$$

Wegen der unterschiedlichen Exponenten der r -Abhängigkeit in den Außenfeldern der höheren Momente (Abschnitt 4.3.3) verbleibt dann als einziger relevanter Beitrag zur Ausbildung eines Feldes $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r})$ der von der Dichte des 2. Momentes $\mu^{(2)}(\vec{r})$ der Ladungsverteilung herrührende Anteil. Diese Größe $\mu^{(2)}(\vec{r})$ hat die Dimension $\frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$ und wird üblicherweise als *Polarisation* \vec{P} [¶] bezeichnet. Ich vermeide an dieser Stelle mit Absicht die formale Reduzierung dieser Dimension auf den Ausdruck

$$\frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{elektr. Ladung} \cdot \text{Länge}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{elektr. Ladung}}{\text{Fläche}} \quad (4.240)$$

[¶]Als Zugeständnis an die in vermutlich allen Lehrbüchern zu findende Praxis verwende ich an dieser Stelle den Großbuchstaben P , obwohl die Polarisation als volumenbezogene Dichte einer extensiven Größe unserer Konvention folgend eigentlich mit p bezeichnet werden müsste.

Danach bestünde nämlich die Gefahr, dass der Leser versucht, die Polarisation als flächenbezogene Ladungsdichte zu interpretieren, was zu nahezu unüberbrückbaren Verständnisproblemen führen würde. (Das schließt nicht aus, dass im Folgenden gelegentlich tatsächlich flächenbezogene Ladungsdichten auftreten werden, die eine Folge der Polarisation sind und gelegentlich auch als zu ihr proportional angesetzt werden).

Aus der Definition von \vec{P} folgt unmittelbar

$$\operatorname{div} \vec{P} = 0 \quad (4.241)$$

Das Material, aus dem die Probe besteht, verhalte sich wie eine Phase (Abschnitt 8.1.13), d.h. für alle seine extensiven Größen lassen sich deren volumenbezogenen Dichten definieren. Daher lässt sich seine Gibbs-Funktion $F(T, V, N)$ als Integral

$$F(T, V, N) = \int_V f(T, n) \cdot d^3r \quad (4.242)$$

schreiben bzw. nun, da das Material zusätzlich polarisierbar ist, als

$$F(T, V, N, \vec{P}(\vec{r})) = \int_V f(T, n, \vec{P}(\vec{r})) \cdot d^3r \quad (4.243)$$

Die freie Energie des Gesamtsystems aus Probe und elektrischem Feld beträgt dann

$$F_{1+2}(T, V, N, \vec{P}(\vec{r})) = \int_V f_2(T, n, \vec{P}(\vec{r})) \cdot d^3r + \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int \left(\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r \quad (4.244)$$

Dabei erfolgt die Integration des 1. Integrals über das von der Probe eingenommene Volumen V , die des 2. Integrals dagegen über den gesamten Raum.

Der Gleichgewichtszustand des Gesamtsystems aus Probe und elektrischem Feld resultiert nun aus der Gleichgewichtsbedingung für den freien Austausch (s. Abschnitt 3.3.13) der Größe $\vec{P}(\vec{r})$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta F_{1+2}(T, V, N, \vec{P})}{\delta \vec{P}} = \int_V \frac{\partial f_2(T, n, \vec{P}(\vec{r}))}{\partial \vec{P}} * \delta \vec{P} \cdot d^3r \\ &+ \varepsilon_0 \cdot \int_{V^{(1+2)}} \left(\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}) \right) * \delta \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}) \cdot d^3r \end{aligned} \quad (4.245)$$

Die Lösung dieses Variationsproblems (s. Abschnitt 3.1.14) ist insbesondere auch von der Geometrie des Probenvolumens V und von der geometrischen Struktur des

äußeren Feldes $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ abhängig. I.a. resultiert daraus ein komplizierter Zusammenhang zwischen der vorgegebenen Funktion $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ und der daraus resultierenden Funktion $\vec{P}(\vec{r})$, der sich nicht mehr als **lokal** wirkendes Funktional

$$\vec{P}(\vec{r}) = f(\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})) \quad (4.246)$$

formulieren lässt. D.h. es liegt ein **globales Problem** vor: Die Polarisation \vec{P} an einer Stelle \vec{r}_1 innerhalb des Materials resultiert **nicht** nur aus dem äußeren Feld $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}_1)$ an derselben Stelle \vec{r}_1 , sondern sie hängt von dem Verlauf des Feldes $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ im gesamten Raum ab! Lediglich unter gewissen besonderen geometrischen Gegebenheiten und unter bestimmten an die Form der Gibbs-Funktion zu stellenden Bedingungen lässt sich (formal) wieder ein lokaler Zusammenhang herstellen.

Ich halte es für angebracht, bereits an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass die Theorie der Materie im elektrischen Feld in der soeben dargelegten Form eine nicht-relativistische Theorie ist, die nur für *stationäre* (oder sich ausreichend langsam ändernde) Zustände gilt. Sobald sich also z.B. das äußere Feld $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ zeitlich verändert hat, gelten alle in diesem Abschnitt angeführten Beziehungen nur für den sich danach einstellenden sog. *eingeschwungenen* Zustand. Die Erfassung auch der Einstellprozesse sprengt den Rahmen der bisherigen Darstellung. Hierzu benötigen wir nicht nur das vollständige Werkzeug der *Elektrodynamik* (Heft 6), sondern zusätzlich auch noch die Grundaussagen der *Thermodynamik der dissipativen Ströme* (Kapitel 8.2).

Den einfachsten der (stationären) Fälle, die (formal) wieder auf eine lokale Theorie führen, werden wir nun diskutieren.

Das materiegefüllte homogene Feld (-)

Die geometrisch einfachste Konfiguration innerhalb der von uns behandelten Systemklasse {Materie + äußeres Feld} ist das *vollständig mit Materie gefüllte homogene Feld*. Als eine mögliche experimentelle Realisierung dieser Konfiguration betrachten wir einen ebenen Plattenkondensator (Abb. 5), der auf seinen beiden Platten von der Fläche A die Ladungen Q bzw. $-Q$ trägt. Die x-z-Ebene des Koordinatensystems legen wir parallel zu den Platten, so dass die y-Achse senkrecht zu ihnen verläuft. Der Plattenabstand d sei klein gegen die Plattenabmessung,

$$d^2 \ll A \quad (4.247)$$

Dann gelten die Gl. 4.181 und 4.204 und das Feld zwischen den beiden Platten ist homogen,

$$\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) = (0, \mathcal{E}_1, 0) \quad (4.248)$$

und hat den Wert

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \cdot A} \quad (4.249)$$

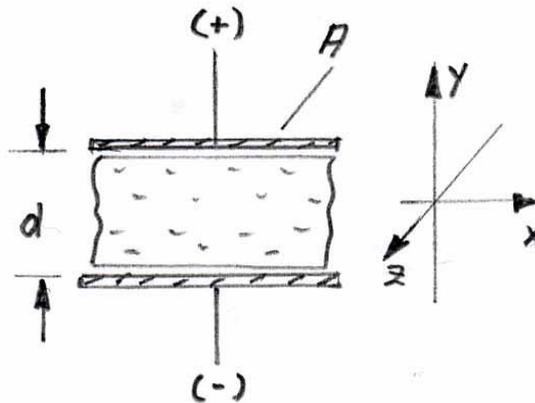


Abb. 5 Prinzipskizze zur Realisierung eines ganz mit Materie gefüllten homogenen elektrischen Feldes

Solange sich zwischen den beiden Platten keine Materie befindet, beträgt die zwischen den Platten gespeicherte Feldenergie

$$E_1(V) = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_V \left(\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r = \frac{Q_1^2 \cdot d}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A} \quad (4.250)$$

Das außerhalb des Kondensators aufgebaute elektrische (Streu-)Feld ist in 1. Näherung ein reines Dipolfeld und hat eine mittlere Amplitude, die wesentlich kleiner ist als \mathcal{E}_1 . Wir berücksichtigen seinen über den gesamten Raum integrierten Beitrag zur Feldenergie durch einen dimensionslosen Geometriefaktor $g_1 \gtrsim 1$, so dass sich insgesamt eine Feldenergie ergibt von

$$E_1 = g_1 \cdot \frac{Q_1^2 \cdot d}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A} \quad (4.251)$$

Das innere Volumen V des Kondensators füllen wir nun vollständig mit dem betrachteten Material aus. Wegen der vorgegebenen Symmetrie des betrachteten Problems gehen wir (zunächst einmal) davon aus, dass die hierbei im Material auftretende Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ ebenso wie das äußere Feld homogen ist und nur eine Komponente in y -Richtung besitzt,

$$\vec{P}(\vec{r}) = (0, P, 0) \quad (4.252)$$

Das Feld der Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ dürfen wir uns vorstellen als das Ergebnis einer Überlagerung einer positiven Ladungsverteilung $q^{(+)}(\vec{r})$ und einer negativen Ladungsverteilung $q^{(-)}(\vec{r})$. Diese beiden Ladungsverteilungen werden lokal dem Betrage nach

identisch, sobald sie um eine kleine Größe $\vec{\delta r}(\vec{r})$ gegen einander verschoben werden,

$$|q^{(+)}(\vec{r})| = |q^{(-)}(\vec{r} + \vec{\delta r}(\vec{r}))| \quad (4.253)$$

Dann gilt offenbar

$$\vec{P}(\vec{r}) = q^{(+)}(\vec{r}) \cdot \vec{\delta r}(\vec{r}) \quad (4.254)$$

Wegen des für elektrostatische Felder geltenden Superpositionsprinzips dürfen wir nun das von dieser Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ erzeugte elektrische Feld $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r})$ auch in der Weise bestimmen, dass wir die von der positiven Ladungsverteilung $q^{(+)}(\vec{r})$ und von der negativen Ladungsverteilung $q^{(-)}(\vec{r})$ erzeugten Felder separat berechnen und erst danach addieren. In der von uns aktuell betrachteten Konfiguration sind aber diese Ladungsverteilungen im Inneren des Materials konstant, so dass sie auch nach einer Verschiebung um den (in unserem Beispiel überdies ebenfalls konstanten) Wert $\vec{\delta r} = (0; \delta y; 0)$ in der Summe keinen Beitrag zum Feld $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r})$ leisten können. Lediglich in einer Zone der Breite δy an der oberen und unteren Oberfläche des Materials verbleibt eine Nettoladung von insgesamt

$$Q_2 = q^{(+)} \cdot \delta y \cdot A \quad (4.255)$$

In dem inneren Volumen V des Kondensators erzeugt diese Ladung zusammen mit der betragsgleichen Gegenladung auf der gegenüber liegenden Kondensatorplatte ein elektrisches Feld

$$\mathcal{E}_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{P}{\varepsilon_0} \quad (4.256)$$

Die geometrische Struktur der Feldverteilung $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r})$ inklusive der real auftretenden Streufelder ist offensichtlich mit der des äußeren Feldes $\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r})$ völlig identisch, so dass wir auch für die gesamte Feldenergie $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r})$ denselben Ansatz wie in Gl. 4.251 verwenden dürfen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} E_{\text{Gesamtfeld}} &= g_1 \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \int_V \left(\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}) \right)^2 \cdot d^3r = \frac{g_1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_V \left(\frac{Q_1}{A} + P \right)^2 \cdot d^3r \\ &= \frac{g_1 \cdot V}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{A} + P \right)^2 \end{aligned} \quad (4.257)$$

Die freie Energie des Gesamtsystems beträgt daher

$$E_{1+2} = V \cdot f_2(T, n, P) + \frac{g_1 \cdot V}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{A} + P \right)^2 \quad (4.258)$$

und der Gleichgewichtszustand ist gegeben durch die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{1+2}(T, n, P)}{\partial P} &= 0 = V \cdot \frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} + \frac{g_1 \cdot V}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{A} + P \right) \Rightarrow \\ P &= -\frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} \cdot \frac{\varepsilon_0}{g_1} - \frac{Q_1}{A} \end{aligned} \quad (4.259)$$

Diese Gl. schreiben wir in der Form

$$-\frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{1}{g_1} \cdot \frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} + \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} \quad (4.260)$$

Der 2. Summand der rechten Seite ist aber mit der Feldstärke des äußeren Feldes identisch, es gilt also

$$-\frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{1}{g_1} \cdot \frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} + \mathcal{E}_1 \quad (4.261)$$

Der Geometriefaktor g_1 in dieser Gl. berücksichtigt die reale geometrische Konfiguration des Experimentes. Um zu experiment-unabhängigen Materialparametern zu gelangen, muss er sehr wohl bestimmt und bei der Auswertung des Experimentes entsprechend berücksichtigt werden. (Zu Abschätzung seiner typischen Zahlenwerte s. Aufgabe 4) Wir interessieren uns an dieser Stelle jedoch primär für die grundsätzlichen physikalischen Zusammenhänge und setzen ihn daher für die weitere Diskussion der Einfachheit halber (und ohne die Situation wesentlich zu verändern) gleich 1,

$$-\frac{P}{\varepsilon_0} \approx \frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} + \mathcal{E}_1 \quad (4.262)$$

Das Gesamtfeld \mathcal{E} beträgt gem. Gl.-en 4.249 und 4.256

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} + \frac{P}{\varepsilon_0} \quad (4.263)$$

Im Gleichgewichtszustand (s. Gl. 4.259) ist dieser Ausdruck aber identisch mit

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} \quad (4.264)$$

Das Gesamtfeld \mathcal{E} hat also in dieser geometrischen Konfiguration (XXX: präzisieren) die Funktion der zur Polarisation *konjugierten* intensiven Variablen, und die Energieform elektrische Energie erhält die Form

$$dE = -\mathcal{E} \cdot dP \quad (4.265)$$

Das in der Gl. 4.264 auftretende negative Vorzeichen bedeutet, dass \mathcal{E} und P entgegengesetzte Richtung haben, sofern die Ableitung $\frac{\partial f_2}{\partial |P|} > 0$ ist. In diesem Fall gilt also:

$$\frac{\partial f_2}{\partial |P|} > 0 \Rightarrow \text{sign}(\mathcal{E}_1) = -\text{sign}(P) \Rightarrow |\mathcal{E}| < |\mathcal{E}_1| \quad (4.266)$$

Materialien mit dieser Eigenschaft werden wir im Abschnitt 4.4.4 behandeln.

Für das Verständnis aller aus einem Feld und aus Materie bestehenden Systeme ist es von essentieller Bedeutung, die dabei auftretenden Feldbegriffe sauber auseinander zu halten. An dieser Stelle sind das

1. das von außen angelegte äußere elektrische Feld \mathcal{E}_1 ;
2. das durch die Polarisation der Materie entstehende elektrische Feld \mathcal{E}_2 und schließlich
3. das durch Superposition dieser beiden Felder gebildete Gesamtfeld \mathcal{E} .

Es hat sich nun eingebürgert, durch Multiplikation mit der Naturkonstanten ε_0 eine weitere, nur vordergründig neue Größe zu definieren, nämlich

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}_1 \quad (4.267)$$

und als die *dielektrische Verschiebungsdichte* zu bezeichnen. Ich finde diese Namensgebung nicht besonders gelungen und kann daher dem Leser hierfür auch keine überzeugende Begründung anbieten. Ich bezweifle sogar, dass diese Definition einer neuen Größe \vec{D} zumindest unter didaktischen Kriterien überhaupt sinnvoll ist. Meiner Einschätzung nach würde der Verbleib bei den Formulierungen *äußeres Feld* einerseits und *Gesamtfeld* andererseits den Einstieg in diese Materie deutlich erleichtern. Die wissenschaftliche Literatur ist jedoch seit über 100 Jahren einen anderen Weg gegangen. Wir nehmen daher am besten diese Definition und seinen Namen als gegeben hin und beschränken uns auf die Diskussion der Gesetzmäßigkeiten dieser Größe.

Aus der Definition von \vec{D} (Gl. 4.267) zusammen mit Gl. 4.181 folgt unmittelbar

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}_1) = q \quad (4.268)$$

Üblicherweise nimmt man nun eine Proportionalität zwischen dem Gesamtfeld $\vec{\mathcal{E}}$ und dem äußeren Feld $\vec{\mathcal{E}}_1$ und damit auch \vec{D} an und schreibt diese in der Form

$$\vec{D} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (4.269)$$

Die dimensionslose Größe ε_r ist eine materialspezifische Größe, die in Anlehnung an die bereits getroffene Namensgebung für ε_0 die Bezeichnung *relative Dielektrizitätskonstante* erhalten hat. Sie ist nur dann wohl definiert, wenn die geometrischen Bedingungen von Feld und Probe eine formal lokale Beschreibung der Zusammenhänge erlauben. Offenbar gilt

$$\varepsilon_r = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} \quad (4.270)$$

Mit Hilfe der Gl.-en 4.262 und 4.264 folgt daraus

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial f_2(T,n,P)}{\partial P}} \quad (4.271)$$

Die Größe

$$\varepsilon_r - 1 = \chi = \frac{P}{\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial f_2(T,n,P)}{\partial P}} \quad (4.272)$$

bezeichnet man als die *dielektrische Suszeptibilität* des Materials. Unter welchen Bedingungen ε_r wirklich eine Konstante ist und welche Werte sie üblicherweise annimmt, werden wir in den nachfolgenden Abschnitten ausführlich diskutieren.

In der aus der speziellen Geometrie des materie-gefüllten homogenen Feldes resultierenden Formulierung erhält also der Zusammenhang zwischen $\vec{D}(\vec{r})$ und dem Gesamtfeld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ oder auch der Polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ wieder eine (scheinbar) lokale Struktur: Die Gl. 4.269 z.B. vermittelt den Eindruck, als ob das Gesamtfeld \mathcal{E} an einer Stelle \vec{r} ausschließlich eine Funktion der Verschiebungsdichte D (also des äußeren Feldes) an derselben Stelle \vec{r} wäre. Dies ist jedoch, wie wir bereits wissen, i.a. nicht richtig. Nur in gewissen Sonderfällen, zu denen auch die von uns gewählte besonders einfache Geometrie gehört, lässt sich eine derartige Beziehung formulieren. Im nachfolgenden Abschnitt werden wir weitere Beispiele behandeln, die eine ähnliche Formulierung erlauben, und die uns in logisch nachvollziehbaren Schritten zu den sog. *Ent-Elektrisierungsfaktoren* führen werden. In vielen Lehrbüchern werden diese nur verbal und ohne eine tiefer gehende Begründung eingeführt.

Zum Abschluss dieses Absatzes weise ich noch einmal auf 2 der Fallstricke in der historisch bedingten Formulierung dieser Theorie hin:

1. Die Formulierung des Zusammenhangs zwischen den Größen \vec{D} und $\vec{\mathcal{E}}$ in Form der Gl. 4.269 suggeriert, dass $\vec{\mathcal{E}}$ (also das Gesamtfeld) die unabhängige Variable darstellt, also im Sinne eines Response-Konzeptes die Anregung, und \vec{D} die materialbedingte Antwort des Gesamtsystems auf diese Anregung. Es ist aber genau umgekehrt!
2. Die faktorielle Darstellung von ε_0 und ε_r in der Gl. 4.269 und ebenso ihre fast identische Bezeichnung suggeriert eine enge logische Verwandtschaft zwischen diesen beiden Größen, die aber in keiner Weise gegeben ist. Vielmehr dient
 - die Naturkonstante ε_0 der Verknüpfung der Größen des elektrischen Feldes mit den bis dahin nur mechanisch definierten Größen *Energie* und *Kraft*; und
 - der Materialparameter ε_r der Erfassung des von Materie (zusätzlich) erzeugten elektrischen Feldes, wenn es sich in einem äußeren elektrischen Feld befindet.

Ellipsoide im homogenen Feld (-/-)

(XXX: Der Text des Absatzes *Ellipsoide im homogenen Feld* ist noch nicht verfügbar.)

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts Das Gesamtsystem aus Materie und elektrischem Feld ist noch nicht verfügbar.)

4.4.4 Dielektrische Materialien (-)

Die Polarisation \vec{P} entspricht in ihrem logischen Konzept einem *Ordnungsparameter*, wie wir ihn im Abschnitt 8.1.16 (*Innere Variablen, Phasenübergänge 2. Art*) kennen lernen werden. Die volumenbezogene Dichte der freien Energie $f(T, n, P)$ des Materials lässt sich daher in eine Reihe der Form

$$f(T, n, P) = f^{(0)}(T, n) + \sum_{i=1}^{\infty} k^{(i)}(T, n) \cdot P^i \quad (4.273)$$

entwickeln. Der im Abschnitt 8.1.16 eingehender diskutierten Argumentationskette folgend setzen wir voraus, dass in dieser Reihenentwicklung Koeffizienten $k_i \neq 0$ nur für die Terme mit geraden Exponenten zulässig sind. Beschränken wir uns überdies auf Materialien, deren Polarisation ohne äußeres Feld ($\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{r}) = 0$) verschwindet, dann muss insbesondere die Bedingung

$$k^{(2)}(T, n) > 0 \quad (4.274)$$

erfüllt sein. Der Einfachheit halber beschränken wir uns b.a.w. auf die Näherung

$$f_2(T, n, P) \approx f_2^{(0)}(T, n) + k^{(2)}(T, n) \cdot P^2 \quad (4.275)$$

Des weiteren beschränken wir uns sogleich auf die Geometrie des *vollständig mit Materie gefüllten homogenen Feldes* (Absatz S. 540). Dann beträgt die gesamte freie Energie des Systems

$$F = V \cdot \left(f_2^{(0)}(T, n) + k^{(2)}(T, n) \cdot P^2 \right) + \frac{V}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{A} + P \right)^2 \quad (4.276)$$

Für die weitere Diskussion können wir, unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} = 2 \cdot k^{(2)}(T, n) \cdot P \quad (4.277)$$

direkt die Ergebnisse aus dem Absatz S. 540 übernehmen. Wir erhalten so

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} = -2 \cdot k^{(2)}(T, n) \cdot P \quad (4.278)$$

Wegen der Bedingung 4.274 haben bei diesen Materialien also die Polarisation P und das Gesamtfeld \mathcal{E} **entgegengesetztes** Vorzeichen. Diese Materialeigenschaft hat den Namen *dielektrisch* (von $\delta\iota\alpha$ (griech.) zwischen, durch und durch) erhalten. Wir berechnen die relative Permeabilität gem. Gl. 4.271:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{P}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot k^{(2)}(T, n) \cdot P} = 1 + \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot k^{(2)}(T, n)} > 1 \quad (4.279)$$

Dielektrische Materialien haben also immer eine Permeabilität $\varepsilon_r > 1$. Die Suszeptibilität ist bis auf einen Maßstabsfaktor mit dem Kehrwert von $k^{(2)}$ identisch, sie nimmt also dann hohe Werte an, wenn im Material mit relativ geringem Aufwand an freier Energie eine stationäre Verschiebung von elektrischen Ladungen möglich ist. Die real auftretenden χ -Werte liegen zwischen $6,6 \cdot 10^{-5}$ (Helium unter Normalbedingungen) und ca. 80 (spezielle keramische Verbindungen, s. auch Abschnitt XXX). Selbst wenn wir diese Werte anstelle auf das Volumen auf die Massendichte beziehen, verbleibt eine über fast 6 Größenordnungen reichende Bandbreite in der dielektrischen Suszeptibilität! An dieser Stelle dokumentiert sich der enorme Unterschied in der Strukturierung der Ladungsverteilung innerhalb der verschiedenen Molekültypen, bedingt durch die unterschiedliche Art der sog. chemischen Bindung, d.h. der Mechanismen, die die verschiedenen Atome zu Molekülen vereinigt, s. Abschnitt 7.13.2.

Der durch die Gl. 4.278 ausgedrückte lineare Zusammenhang zwischen der Polarisation P und dem Gesamtfeld \mathcal{E} ist eine Folge des Ansatzes für die freie Energie des Systems gem. Gl. 4.276. Er resultiert insbesondere daraus, dass die Reihenentwicklung nach P bereits mit dem in P quadratischen Glied abgebrochen wurde. Sobald auch höhere Terme eine relevante Rolle spielen, ist diese Linearität nicht mehr gegeben, s. Abschnitt 4.4.7.

Den in diesem Abschnitt quantifizierten Mechanismus der dielektrischen Polarisation bezeichnet man als *Verschiebungspolarisation*. Er setzt voraus, dass das Material ohne äußeres elektrisches Feld auch auf molekularer Dimension keine elektrischen Dipole enthält, sondern dass diese erst durch die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld *induziert* werden. Es hat nun eine Vielzahl von Versuchen gegeben, das makroskopische Polarisationsverhalten eines Materials aus den molekularen Eigenschaften der Bestandteile dieses Materials herzuleiten, konkret also z.B. die Größe ε_r einer Lösung eines polarisierbaren Stoffes in einer nicht polarisierbaren Flüssigkeit über eine Beziehung zu bestimmen, die nur molekulare Kenngrößen dieses Materials (und dessen Konzentration) enthält. Die bekannteste derartige durch ein mikroskopisches Modell hergeleitete Beziehung ist die nach Clausius und dem italienischen Physiker *Ottavio Fabrizio Mossotti* (*1791 in Novara/Piemont; † 1863 in Pisa) benannte Clausius-Mossotti-Gleichung

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{3 \cdot \varepsilon_0} \quad (4.280)$$

(In Anwendung auf die Berechnung des Brechungsindex für elektromagnetische Strahlung (s. Abschnitt 11.2.1) wird dieselbe Beziehung meist nach Lorentz und dem dänischen Physiker *Ludvig Valentin Lorenz* (* 1829 in Helsingør; † 1891 in Hjærteslag) als *Lorentz-Lorenz-Gl.* bezeichnet). Die in dieser Gl. auftretende Größe α ist die molekulare Polarisierbarkeit des gelösten Materials; sie wird als konstant angenommen. Die Gl. 4.280 geht in die Gl. 4.279 über, wenn wir folgenden Zusammenhang

annehmen:

$$\frac{1}{2 \cdot k^{(2)}} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} \cdot n \cdot \alpha \quad (4.281)$$

Der Kehrwert der von uns phänomenologisch eingeführten Größe $k^{(2)}$ ist also bis auf den Faktor $\frac{2}{3} \cdot (\varepsilon_r + 2)$ mit der (makroskopischen) Volumendichte der Polarisierbarkeit identisch. Dass in dieser Gl. 4.281 zusätzlich noch eine explizite Abhängigkeit dieses Ausdrucks von ε_r auftritt, der Zusammenhang zwischen ε_r und $n \cdot \alpha$ also letztlich nichtlinear ist, resultiert aus dem bei der Herleitung dieser Gl. verwendeten Konzept, Abschirmeffekte, also Abweichungen des realen Systems von der Näherung des homogenen elektrischen Feldes und der ebenfalls homogenen Polarisierung zu berücksichtigen. Ich werde hierauf nicht näher eingehen.

Wir betrachten nun Materialien, die auf molekularen Dimensionen auch ohne äußeres Feld bereits ein gewisses Dipolmoment aufweisen. Beim Übergang auf Volumenbereiche, die im Sinne der Kontinuums-Physik weiterhin als infinitesimal betrachtet werden dürfen, aber dennoch groß genug sind für eine Behandlung gemäß den Konzepten der Thermodynamik, mitteln sich die einzelnen Dipolmomente im thermodynamischen Gleichgewicht aus, so dass keine endliche Polarisierung $\vec{P}(\vec{r})$ resultiert. Sobald wir jedoch diese Gleichverteilung stören, resultiert eine endliche Polarisierung, wobei gleichzeitig die Entropie des Systems **abnimmt**. Diesen Mechanismus der elektrischen Polarisierung bezeichnet man als *Orientierungs-Polarisation*. Wir treffen nun die vereinfachende Annahme, dass bei dieser Störung der Orientierungsgleichverteilung die **entropischen** Effekte im Vergleich zu den energetischen Effekten **dominieren**, solange man bei diesem Vergleich den energetischen Aufwand zum Aufbau des elektrischen Feldes **nicht** mit einbezieht. Wir interpretieren also wieder die Polarisierung als einen Ordnungsparameter des Systems und approximieren nun die Dichte der freien Energie des Materials durch den Ausdruck

$$f_2(T, n, P) = e_2(T, n) - T \cdot s_2(T, n, P) = f_2^{(0)}(T, n) - T \cdot c^{(2)}(T, n) \cdot P^2 \quad ; \quad c^{(2)} < 0 \quad (4.282)$$

Die Annahme, dass bei einer Veränderung von P die entropischen Effekte gegenüber den energetischen dominieren, äußert sich in dieser Gl. 4.282 dadurch, dass der Term $f_2^{(0)}(T, n)$ nicht mehr explizit von P abhängt. Ein derartiges Material hat gem. Gl. 4.272 eine elektrische Suszeptibilität von

$$\chi = \frac{P}{\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P}} = \frac{-1}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot T \cdot c^{(2)}} > 0 \quad (4.283)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht (s. wieder Gl. 4.259) beträgt der Zusammenhang zwischen \mathcal{E} und P nun

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial f_2(T, n, P)}{\partial P} = 2 \cdot c^{(2)}(T, n) \cdot P < 0 \quad (4.284)$$

Auch für diesen Typ von Materialien haben also die Polarisierung P und das Gesamtfeld \mathcal{E} eine **entgegen gesetzte** Richtung, allerdings ist nun die Suszeptibilität pro-

portional zu T^{-1} . Ein derartiges Verhalten wird nach dem Physiker *Pierre Curie* (* 1859 in Paris; † 1906 ebenda) auch als *Curie-Gesetz* bezeichnet.

Bei einem Material, das sowohl den Mechanismus der Verschiebungs-Polarisation als auch eine Orientierungs-Polarisation zeigt, erwarten wir daher in 1. Näherung eine Gibbs-Funktion der Form

$$f_2(T, n, P) \approx f_2^{(0)}(T, n) + (k^{(2)}(T, n) - T \cdot c^{(2)}(T, n)) \cdot P^2 \quad (4.285)$$

und damit eine Suszeptibilität

$$\chi = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{k^{(2)}(T, n)} - \frac{1}{T \cdot c^{(2)}} \right) \quad (4.286)$$

Auch für diese Gleichung gibt es eine korrespondierende über ein mikroskopisches Modell hergeleitete Beziehung,

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3 \cdot \kappa \cdot T} \right) \quad (4.287)$$

die nach dem niederländischen Physiker *Peter Josephus Wilhelmus Debye* (* 1884 in Maastricht; † 1966 in Ithaca/N.Y.(USA)) als *Debye-Gleichung* bezeichnet wird.

4.4.5 Ferro-elektrische Materialien (-/-)

(XXX: Der Text des Abschnitts *Ferro-elektrische Materialien* ist noch nicht verfügbar.)

4.4.6 Die dielektrische Funktion (-)

Wie wir im Abschnitt 4.4.4 gelernt haben, ist das dielektrische Verhalten eines Materials durch Angabe der Größe ε_r (oder auch χ) wohl definiert. Diese Größe beschreibt einen *Response*, nämlich den zwischen der als Eingangsgröße behandelten Variablen \mathcal{E} und der als Ausgangsgröße dienenden Variablen D . (Ich weise den Leser jedoch nochmals auf die am Ende des Absatzes *Das materialgefüllte homogene Feld* (S. 540) stehenden Erläuterungen zur Bedeutung von \mathcal{E} und D hin). Entsprechend ist bei einer konkreten Messung von ε_r vorzugehen. Damit aber ist auch bereits die Vorgehensweise vorgezeichnet für den Übergang auf Situationen, in denen die Größe \mathcal{E} nicht mehr konstant ist, sondern explizit von der Zeit abhängt. Wir müssen lediglich die in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 allgemein dargelegten Erweiterungen konkret anwenden. D.h. wir betrachten nun die Situation, in der die Größe \mathcal{E} eine periodische Funktion der Zeit ist,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad (4.288)$$

und definieren die Funktion $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$ über die Gleichung

$$D(\omega) = \varepsilon_r(\omega) \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathcal{E}(\omega) \quad (4.289)$$

Diese Funktion $\varepsilon_r(\omega)$ bezeichnet man als die *dielektrische Funktion* des Materials. In ihr ist das (lineare) elektrische Verhalten dieses Materials vollständig abgebildet. $\varepsilon_r(\omega)$ ist eine i.a. komplexwertige Funktion, denn es treten zumindest in gewissen Frequenzbereichen Phasenverschiebungen zwischen der Anregung \mathcal{E} und der Antwort D auf. Die Anregung wird aber weiterhin als *langsam* aufgefasst in dem Sinne, dass die über $|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}| > 0$ induzierten magnetischen Effekte und deren Rückwirkung auf das elektrische Verhalten weiterhin vernachlässigt werden dürfen.

Eine Messung der Funktion $\varepsilon_r(\omega)$ liefert also nicht nur detaillierte Informationen über die Einsatzmöglichkeiten dieses Materials in elektrischen Bauteilen und Apparaten, sie liefert auch sehr weitgehende Informationen über den Aufbau und das materialwissenschaftliche Verhalten dieses Materials, s. Abschnitt 12.3.4.

(XXX: Der weitere, noch fehlende Text des Abschnitts *Die dielektrische Funktion* ist noch nicht verfügbar.)

4.4.7 Nichtlineare Polarisation (-/-)

(XXX: Der Text des Abschnitts *Nichtlineare Polarisation* ist noch nicht verfügbar.)

4.5 Nicht-elektrisch induzierte Polarisation (-)

Wir wenden uns nun Materialien zu, bei denen eine elektrische Polarisation (auch) durch andere physikalische Größen als durch ein äußeres elektrisches Feld erzeugt werden kann. Im Formalismus der allgemeinen Dynamik bedeutet dies, dass (z.B.) die Gibbsfunktion $F(T, X, P)$ bzgl. P nicht mehr faktorisiert, dass also die gemischten Ableitung

$$\frac{\partial^2 F(T, X, P)}{\partial X \cdot \partial P} \neq 0 \quad (4.290)$$

nicht mehr verschwinden und daher die Energieformen X -Energie und elektrische Energie mit einander gekoppelt sind. Dadurch ändert sich bei einer Veränderung der extensiven Größe X (oder der zugehörigen intensiven Variablen ξ) auch der Wert der (frei austauschenden) Polarisation P . I.a. gibt es jeweils bestimmte Materialien, bei denen diese unterschiedlichen Effekte besonders stark ausgeprägt sind. In vielen Fällen haben diese Effekte besondere Namen erhalten. Die Polarisation durch Änderung der Temperatur z.B. wird als *Pyroelektrizität* bezeichnet und die Polarisation durch Änderung einer Längenausdehnung als *Piezoelektrizität*. Die technisch wichtigsten aus dieser Klasse von Effekten werden wir im Folgenden stichwortartig behandeln.

4.5.1 Der Piezo-Effekt (-)

In diesem Abschnitt diskutieren wir Materialien, für die die Größe

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 E(T, L_x, L_y, L_z, P)}{\partial L_i \cdot \partial P} \right| &= \left| -\frac{\partial F_i(T, L_x, L_y, L_z, P)}{\partial P} \right| \\ &= \left| -\frac{\partial \mathcal{E}(T, L_x, L_y, L_z, P)}{\partial L_i} \right| > 0 \end{aligned} \quad (4.291)$$

deutlich von 0 verschieden ist. L_i sind dabei die geometrischen Abmessungen in den 3 Raumdimensionen des als quaderförmig angenommenen festen Körpers aus dem betrachteten Material. F_i ist die dem Körper in der i -Richtung aufgeprägte Kraft. Ich habe mit Absicht in der Gl. 4.291 die Energie als Gibbs-Funktion genommen und nicht etwa die freie Energie, da die in Betracht kommenden Prozesse überwiegend schnell veränderlich sind, so dass sie eher bei konstanter Energie ablaufen als bei konstanter Temperatur. In dieser abstrakten Darstellung wird unmittelbar klar, dass Materialien, für die Gl 4.291 gilt, 2 unterschiedliche Typen von Experimenten (und technischen Anwendungen) ermöglichen:

1. Mechanische Belastung eines Probekörpers ($F_i \neq 0$) und Messung bzw. technische Nutzung der dadurch auftretenden elektrischen Polarisation P ; dieser Effekt wird als *Piezo-Effekt* bezeichnet; oder
2. Aufprägen eines elektrischen Feldes \mathcal{E} und Messung bzw. technische Nutzung der dadurch auftretenden mechanischen Kraft F_i bzw. (unter der experimentellen Bedingung der freien Expansion) der dadurch entstehenden Deformation des Körpers; diesen Effekt bezeichnet man als *Elektrostriktion*.

Bei der Diskussion der Elektrostriktion werde ich mich auf den Fall beschränken, dass die mechanischen Abmessungen des Probekörpers konstant bleiben, so dass nur eine Kraft F_i auftritt, jede Verformung aber durch die experimentellen Bedingungen unterdrückt wird. Dies entspricht zwar nicht den in den meisten technischen Anwendungen vorliegenden Gegebenheiten, ist aber wesentlich leichter in den konkreten Behandlung. Anderenfalls müsste ich bereits an dieser Stelle die Theorie des linear-elastischen Festkörpers (Abschnitt 12.2.2) als bekannt voraussetzen.

(XXX: Der an dieser Stelle geplante, weitere Text zu den physikalischen Grundlagen des Piezo-Effektes ist noch nicht verfügbar.)

Als die ersten historisch belegten und publizierten Arbeiten zu dieser Klasse von Phänomenen werden in der Literatur die Untersuchungen von *Pierre und Jacques Curie* (* 1855 in Paris; † 1941 in Montpellier) an Turmalinen aus dem Jahr 1880 genannt ([5]). *Turmaline* sind eine Klasse von Silikat-Mineralien mit meist sehr komplexer chemischer Zusammensetzung, die insbesondere eine Vielzahl unterschiedlicher Alkali- und Erdalkalimetallen enthalten. Ihre Gemeinsamkeit besteht insbesondere in der trigonalen Kristallstruktur und der intensiven Färbung, die oft sogar mit der Betrachtungsrichtung wechselt.

Die früheste wichtige technische Anwendung piezo-elektrischer Elemente war deren Einsatz als Sender und Empfänger akustischer Schwingungen im Frequenz-Bereich etwa zwischen $100 \cdot Hz$ und $40 \cdot kHz$ zur Unterwasser-Ortung von Unterseebooten etwa ab 1917. Derartige Systeme werden auch heute noch als SONAR (*sound navigation and ranging*) bezeichnet. Heute werden piezo-elektrische Bauelemente außer als Schall- oder Ultraschall-Sender und -Empfänger insbesondere als frequenzbestimmende Bauelemente der Elektronik (s. Absatz 14.2.4) und als Stell-Elemente der Feinst-Positionierung bis in den nm -Bereich eingesetzt.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Der Piezo-Effekt* ist noch nicht verfügbar.)

4.5.2 Die Pyro-Elektrizität (-/-)

Wir behandeln nun Materialien, für die die Größe

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 F(T, X_i, P)}{\partial T \cdot \partial P} \right| &= \left| -\frac{\partial F_i(T, X_i, P)}{\partial P} \right| \\ &= \left| -\frac{\partial \mathcal{E}(T, L_x, L_y, L_z, P)}{\partial L_i} \right| > 0 \end{aligned} \quad (4.292)$$

deutlich von 0 verschieden ist.

(XXX: Der an dieser Stelle vorgesehene weitere Text zur Definition der Pyro-Elektrizität ist noch nicht verfügbar.)

Materialien mit diesen Eigenschaften werden als *pyro-elektrisch* (von $\pi\rho\rho\varepsilon\nu$ (griech.) brennen) bezeichnet. Gibt man bei der Messung oder bei der technischen Anwendung die Änderung der Polarisierung vor und nutzt die daraus resultierende Temperaturänderung des Materials aus, so spricht man meist nicht mehr von einem pyro-elektrischen sondern von einem *thermo-kalorischen* Effekt. Technische Anwendungen finden sie insbesondere als Sensoren und als thermo-elektrische Kühlaggregate.

(XXX: Der weitere, eigentliche Text des Abschnitts *Die Pyro-Elektrizität* ist noch nicht verfügbar.)

(XXX: Der weitere Text des Kapitels *Nicht-elektrisch induzierte Polarisation* ist noch nicht verfügbar.)

4.6 Reibungselektrizität (-)

Bereits in der Einleitung zum Heft 4 *Elektrostatik* habe ich dargelegt, dass die Entdeckung und Charakterisierung der *Reibungselektrizität* die historisch erste wissenschaftliche Auseinandersetzung mit elektrischen Phänomenen darstellte. Und obwohl sie bis heute nicht an technischer Bedeutung verloren hat (s. Abschnitt 4.8.4), ist es bis heute schwierig, in der Literatur eine konsistente Beschreibung und Erläuterung der Basisphänomene der Reibungselektrizität zu finden. Auf dieses offenbar holperige und tückische Terrain werden wir uns also nun begeben.

4.6.1 Experimentelle Grundphänomene der Reibungselektrizität (-)

Ausgangspunkt aller historischen Untersuchungen zur Reibungselektrizität war die experimentelle Erfahrung, dass 2 Objekte aus geeignet ausgewählten unterschiedlichen Materialien durch Reiben aneinander elektrostatisch aufgeladen werden können, dass also nach der Trennung dieser beiden Objekte das eine einen Überschuss an positiver elektrischer Ladung trägt und das andere einen Überschuss an negativer Ladung. Welches der beiden Objekte welche Ladungspolarität annimmt, wird ausschließlich durch die Auswahl der beiden Materialien bestimmt. Alle für Reibungsexperimente geeigneten Materialien sind Nichtleiter, haben also eine spezifische elektrische Leitfähigkeit der Größenordnung $\sigma < 10^{-6} \cdot S \cdot cm^{-1}$ (Auf die genaue Definition dieser von mir an dieser Stelle bereits benutzten Größe wird der Leser bis zum Abschnitt 8.2.7 warten müssen) Typische Vertreter der sich bevorzugt positiv aufladenden Materialien sind Glas, Wolle und Polyamid (z.B. Nylon[®]). Bevorzugt negativ aufgeladen werden z.B. Polysiloxane (Silikon), Polyethylen und Polybutadien (synthetischer Gummi).

Bei genauerer Betrachtung der experimentellen Gegebenheiten wird offensichtlich, dass zur Generierung dieser elektrostatischen Aufladung folgende Sequenz von Schritten erforderlich ist:

1. Herstellung eines *ausreichend engen* Kontaktes zwischen den beiden Materialproben im Bereich einer ausreichend großen Fläche.
2. *Ausreichend schnelle* Trennung der beiden Proben von einander.

Die Formulierung *ausreichend eng* im 1. Schritt bedeutet eine Annäherung der beiden Probenbereiche bis auf atomare Abstände! Diese Annäherung ist bei makroskopischen Objekten selbst bei nahezu ideal ebenen Kontaktflächen nur innerhalb submikroskopisch kleiner Teilbereiche zu erreichen. Die reale Kontaktfläche entspricht also selbst bei erheblichem Anpressdruck nur einem winzigen Bruchteil der makroskopischen Kontaktfläche (s. auch Abschnitt 12.12.3) (XXX: präzisieren). Das Reiben der beiden Objekte an einander bewirkt also (gewollt oder ungewollt) eine signifikante Erhöhung der Fläche, die insgesamt zumindest kurzzeitig in Kontakt mit dem jeweils anderen Material gewesen ist.

Die Formulierung *ausreichend schnell* im 2. Schritt besagt, dass es während dieses Trennungsprozesses nicht wieder zu einem Ladungsausgleich zwischen diesen beiden Proben kommen darf, weil diese noch an einer (oder einigen) Stellen mit einander elektrisch leitend verbunden sind. Die Größenordnung der bei diesem Vorgang relevanten Zeitkonstanten ist durch die elektrische Leitfähigkeiten der beteiligten Materialien bestimmt. Bei Nichtleitern liegt diese Zeitkonstante i.a. in Bereichen, die bei makroskopischen mechanischen Anordnungen durchaus auftreten können. Wir verstehen also bereits in groben Zügen, weshalb elektrostatische Aufladungen insbesondere bei schnell ablaufenden mechanischen Bewegungsvorgängen (z.B. Drehbewegungen in Rotations-Druckmaschinen, Sprühvorgänge in einer Düse) wichtig werden können, s. wieder Abschnitt 4.8.4.

(XXX: Der weitere Text des Absatzes *Experimentelle Grundphänomene der Reibungselektrizität* ist noch nicht verfügbar.)

4.6.2 Physikalische Deutung der Reibungselektrizität (-)

Im Zentrum der nun folgenden Darstellung wird der Begriff des *chemischen Potentials* (für Elektronen) stehen, eine extensive Variable, deren konsequente Einführung erst im Abschnitt 8.1.2 erfolgen wird, deren Definition wir aber an dieser Stelle vorweg nehmen. Wir definieren als das chemische Potential eines Elektrons für ein betrachtetes Material die Energie, die erforderlich ist, um dem betrachteten System (unter Konstanthalten aller übrigen extensiven Variablen) ein Elektron hinzu zu fügen,

$$\mu_e = \frac{\partial E(X_i; N_e)}{\partial N_e} \quad (4.293)$$

In der Literatur wird diese Größe z.T. mit sehr unterschiedlichen Namen belegt. In der traditionellen Metallphysik spricht man oft von der *Austrittsarbeit* für die Elektronen, in der Quantentheorie der Kristalle ist der Begriff *Fermi-Energie* gebräuchlich für eine Größe, die mit der von uns benötigten Größe nicht exakt identisch, aber sehr eng verknüpft ist: Die Fermi-Energie ist das chemische Potential eines Elektrons für den Grenzfall des unendlich ausgedehnten Festkörpers, während das von uns hier benötigte chemische Potential μ_e die real auftretende Größe für das reale, endlich ausgedehnte Objekt ist, bei dem also insbesondere die oberflächenbedingten Effekte eingeschlossen sind. Dem allgemeinen Konzept dieses Buches folgend werde ich ausschließlich die Bezeichnung *chemisches Potential* verwenden. Bei den meisten Festkörpern liegt μ_e im Bereich zwischen 1 und $5 \cdot eV$.

Wir betrachten also nun 2 Materialien (1) und (2) mit unterschiedlichen Werten μ_e ; o.B.d.A. sei

$$\mu_e^{(1)} > \mu_e^{(2)} \quad (4.294)$$

Bringen wir nun 2 Proben aus diesen Materialien mit einander in einen derart engen Kontakt, dass im Kontaktbereich Elektronen frei ausgetauscht werden können, stellen wir also einen *elektrisch leitenden Kontakt* her, so werden (zunächst) Elektronen von der Probe (1) in die Probe (2) übertreten und sich in gewisser Weise in dieser Probe verteilen. Entsprechend werden sich die Elektronen-Verarmungsgebiete der Probe (2) in gewisser Weise innerhalb dieser Probe verteilen. Durch diesen Prozess lädt sich jedoch die Probe (1) negativ gegenüber der Probe (2) auf, und es bildet sich ein elektrisches Feld, das diesen Prozess hemmt und schließlich zum Erliegen bringt. Um diesen Prozess und insbesondere den sich einstellenden stationären Zustand stringenter berechnen zu können, benötigen wir eine Reihe von Grundlagen aus dem Bereich der Thermodynamik von Vielteilchensystemen und aus der Kristallphysik. Die hier vorliegende Situation des freien Austausches elektrisch geladener Teilchen wird uns überdies noch mehrfach begegnen, insbesondere in der Elektrochemie (Abschnitt 8.3) und in der Halbleiterphysik (Abschnitt 9.6). Daher beschränke ich mich an dieser Stelle auf die nicht tiefer gehend begründete Aussage, dass die Ladungszonen, die sich

in beiden Kontaktpartnern bilden, auf eine schmale oberflächennahe Schicht begrenzt bleiben, deren mittlere Dicke wir mit l_D (es handelt sich um die sog. Debye-Länge, s. Abschnitt 8.3.3) bezeichnen wollen. Es gilt

$$l_D \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4.295)$$

n : Volumenkonzentration der Ladungsträger

Typische Werte für die Dicke l_D dieser Raumladungsschicht sind

$$l_D \approx 0,1 \cdot nm \text{ für Metalle} \quad (4.296)$$

$$1 \cdot \mu m \text{ für sog. Halbleiter} \quad (4.297)$$

Halbleiter mit einer extrem geringen elektrischen Leitfähigkeit bezeichnet man i.a. als Nichtleiter. Wegen Gl. 4.295 nimmt in ihnen die Größe l_D deutlich größere Werte als $1 \cdot \mu m$ an. Die mechanische Anordnung dieser Kontaktzone darf also durch einen Plattenkondensator mit dem Plattenabstand l_D angenähert werden. Dessen Energie beträgt (s. Abschnitt 4.4.1)

$$E_0 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q^2 \cdot l_D}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A} \quad (4.298)$$

Wir dürfen nun zur Orientierung annehmen, dass der stationäre Zustand des Elektronenaustauschs dann erreicht ist, wenn diese elektrische Energie von derselben Größenordnung ist wie die durch den Übergang der Elektronen gewonnene Energie,

$$Q \cdot (\mu_e^{(1)} - \mu_e^{(2)}) \approx \frac{Q^2 \cdot l_D}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A} \Rightarrow \frac{Q}{A} = \frac{2 \cdot \varepsilon_0}{l_D} \cdot (\mu_e^{(1)} - \mu_e^{(2)}) \quad (4.299)$$

Daraus resultiert eine elektrische Spannung von

$$U_0 = \frac{Q}{C} = \frac{Q \cdot l_D}{\varepsilon_0 \cdot A} = 2 \cdot (\mu_e^{(1)} - \mu_e^{(2)}) \quad (4.300)$$

Da μ_e bei allen Materialien im Bereich einiger V liegt, kann der Betrag dieser Spannung U_0 auch nicht mehr als einige V betragen.

Wird nun jedoch der Kontakt zwischen den beiden Proben so schnell aufgehoben, dass es während dieses Vorganges nur zu minimalen Umladungsprozessen kommen kann, so bleibt die Ladung Q des als Kondensator angenäherten Probenpaares erhalten, während sich der Plattenabstand auf einen Wert $d \gg l_D$ vergrößert. Entsprechend steigt die Spannung U zwischen den beiden Proben auf einen Wert

$$U = U_0 \cdot \frac{d}{l_D} \quad (4.301)$$

Die damit verbundene Energieaufnahme des Systems

$$E = E_0 \cdot \frac{d}{l_D} \quad (4.302)$$

muss von dem physikalischen Objekt aufgebracht werden, das die mechanische Trennung der beiden Proben erzwingt. Da sich der Abstand d zwischen den beiden Ladungszonen bei diesem Prozess um mehrere Größenordnung vergrößert, können durch diesen Prozess erhebliche Spannungen auftreten, die oft nur dadurch begrenzt werden, dass bisher nicht betrachtete Entladungsprozesse einsetzen, z.B. durch Ionisierung der umgebenden Luft.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Physikalische Deutung der Reibungselektrizität* ist noch nicht verfügbar.)

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Reibungselektrizität* ist noch nicht verfügbar.)

4.7 Messung elektrostatischer Größen (-/-)

In diesem Kapitel werden wir nicht darauf beschränken zu schildern, wie vorzugsweise elektrostatische Größen gemessen werden können. Wir werden vielmehr einige der für die Durchführung grundlegender Experimente der Elektrostatik notwendigen Apparate oder Elemente behandeln, insbesondere also auch solche zur Erzeugung und Speicherung (getrennter) elektrischer Ladungen.

(XXX: Der weitere Kopftext des Kapitels *Messung elektrostatischer Größen* ist noch nicht verfügbar.)

4.7.1 Elektrostatische Spannungsgeneratoren (-/-)

Bevor, historisch betrachtet, mit der Durchführung elektrostatischer Experimente begonnen werden konnte, bedurfte es eines Apparates zur Erzeugung ausreichend hoher elektrischer Spannungen. Hierzu ist es erforderlich, einen Teil der in ein einem Probekörper vorhandenen elektrischen Ladung unterschiedlicher Polarität räumlich zu trennen. Als erstem gelang dies Volta durch die von ihm erfundene sog. Influenzmaschine. Sie arbeitet nach dem Prinzip der repetitiven (elektrostatischen) Induktion mit nachfolgender Ladungstrennung.

(XXX: Der weitere, eigentliche Text des Abschnitts *Elektrostatische Spannungsgeneratoren* ist noch nicht verfügbar.)

4.7.2 Elektrostatische Kondensatoren (-/-)

Bauelemente oder Apparate zur Speicherung elektrischer Ladungen haben wir bereits im Abschnitt 4.3.1 behandelt und als *Kondensatoren* bezeichnet. Für die geometrisch besonders einfache Anordnung 2-er planparalleler Platten haben wir den Zusammenhang zwischen Baugröße und Kapazität bereits berechnet (Gl. 4.207).

(XXX: Der weitere, eigentliche Text des Abschnitts *Elektrostatische Kondensatoren* ist noch nicht verfügbar.)

4.7.3 Das Elektrometer (-/-)

Der entscheidende Unterschied zwischen einem üblichen Voltmeter der Elektrotechnik und Elektronik und einem elektrostatischen Voltmeter oder *Elektrometer* ist der jeweilige Strombedarf, bei einem üblichen Voltmeter angegeben durch seinen sog. Innenwiderstand. Da in Versuchsanordnungen der Elektrostatik meist extrem niedrige, oft kaum messbare Ströme auftreten, muss ein hierfür taugliches Voltmeter ebenfalls einem extrem niedrigen Strombedarf aufweisen.

(XXX: Der weitere, eigentliche Text des Abschnitts *Das Elektrometer* ist noch nicht verfügbar.)

4.7.4 Die Bestimmung der Elementarladung (-)

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts gelang der physikalischen Forschung ein Durchbruch bei dem Verständnis des Aufbaus der Atome. Durch eine Reihe von Experimenten, insbesondere mit geladenen Teilchenströmen im Vakuum (zu dieser Zeit meist als Kanalstrahlen-Experimente bezeichnet), gelang der experimentelle Nachweis der Existenz der Protonen (von $\pi\rho\sigma\tau\omicron\nu$ (griech.) der erste) und der Elektronen, s. Abschnitt 10.1.1. Damit wurde es mehr als plausibel anzunehmen, dass die elektrische Ladung Q in der realen Welt nur als ganzzahliges Vielfaches einer sog. Elementarladung Q_0 auftritt und dass diese mit der elektrischen Ladung des Elektrons identisch ist. Es bestand daher die Herausforderung, diese Naturkonstante experimentell zu bestimmen. Diese Aufgabe löste als erster im Jahr 1909 der amerikanische Physiker *Robert Andrews Millikan* (* 1868 in Morrison/Ill.(USA); † 1953 in Pasadena/Cal.(USA)). Seine von ihm selbst in den darauf folgenden Jahren ständig verbesserten Messergebnisse publizierte er erstmals 1911 ([6]). 1923 erhielt er für diese (und andere) bahnbrechenden Arbeiten den Nobelpreis für Physik. Die von ihm gewählte Messanordnung wird heute allgemein als *Millikan-Versuch* bezeichnet und ist heute immer noch eines der Standardexperimente im Physikalischen Praktikum an Schulen und Universitäten.

Das Prinzip dieser Methode besteht in der Verfolgung der Bewegung mikroskopisch kleiner Öltröpfchen in dem homogenen elektrischen Feld eines Plattenkondensators mit Hilfe eines Mikroskops. Die Öltröpfchen werden zuvor elektrisch aufgeladen und unterliegen innerhalb des Kondensators sowohl der elektrischen Wechselwirkung des Kondensatorfeldes als auch der Gravitations-Wechselwirkung der Erde. Die Reibung der Tropfen in der Luft ist stark genug, um die Tropfen noch innerhalb der Messstrecke in eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit zu zwingen. Der Zahlenwert dieser Geschwindigkeit ergibt sich aus der Summe der beiden genannten Wechselwirkungen und aus der Größe des individuellen Tropfens. Durch eine geeignete Kombination von Messungen an demselben Tropfen bei unterschiedlichen Einstellungen des elektrischen Feldes kann dieser individuelle Tropfen-Parameter eliminiert werden. Als Ergebnis einer einzelnen derartigen Messung erhält man die Gesamtladung des vermessenen individuellen Tropfens. Wiederholt man diese Messung ausreichend oft an jeweils anderen Tropfen, so erhält man eine Gesamtheit $\{Q_i\}$

von Einzelmessungen, die sich in n Untergruppen einteilen lassen mit Mittelwerten $\langle Q \rangle^{(k)}$, für die in guter Näherung gilt

$$\langle Q \rangle^{(k)} = k \cdot Q_0 \quad (4.303)$$

Wir interpretieren daher dieses Gesamtergebnis als eine Messung der Elementarladung Q_0 und deuten den jeweiligen Vorfaktor k als die Anzahl der Elementarladungen, die sich auf denjenigen Oeltropfen bei der Messung befanden, die zu dieser Untergruppe geführt haben. Bereits der in der Erstpublikation von Millikan 1911 angegebene Wert, der nach Umrechnung auf die heute vorgeschriebenen SI-Einheit *Coulomb*

$$Q_0 = 1,6401 \cdot 10^{-19} \cdot Cb$$

betrug, wich von dem aktuell anerkannten Wert (s. Kapitel 4.11) nur um $2,4 \cdot \%$ ab. Danach gelang es ihm, durch umfangreiche Versuchsreihen mit unterschiedlichen Gasatmosphären den Einfluss der Reibung noch präziser zu erfassen. Der in seiner nobel lecture vorgestellte Wert von $1,5924 \cdot 10^{-19} \cdot Cb$ lag nur noch um $6,1 \cdot \%0$ unter dem o.a. Sollwert.

Moderne Messverfahren für Q_0 basieren auf anderen Prinzipien, z.B. auf dem *Quanten-Hall-Effekt*.

(XXX: Der weitereText des Abschnitts *Die Messung der Elementarladung* ist noch nicht verfügbar.)

(XXX: Der weitereText des Kapitels *Messung elektrostatischer Größen* ist noch nicht verfügbar.)

4.8 Elektrostatik des täglichen Lebens (-)

(XXX: Der Kopftext des Kapitels *Elektrostatik des täglichen Lebens* ist noch nicht verfügbar. Er wird auch den nachfolgenden Text enthalten:)

Elektrostatische Effekte treten insbesondere dadurch auf, dass Objekte mit einer Überschussladung belegt werden, die sich bei ausreichender elektrischer Leitfähigkeit innerhalb einer endlichen Zeit auf der Oberfläche dieser Objekte verteilt. Daher ist die Stärke der mit dieser elektrostatischen Aufladung verknüpften Effekte meist proportional zur Oberfläche der Objekte und nicht etwa proportional zu deren Volumen. Daher sind eine Reihe der nachfolgend behandelten Effekte insbesondere bei **kleinen Teilchen** von Bedeutung und werden daher insbesondere in Zusammenhang mit Fragestellungen der Grenzflächenphysik (Abschnitt 8.1.18) diskutiert.

Ich beginne dieses Kapitel mit den elektrostatisch dominierten Effekten in der Natur und schildere danach einige technische Anwendungen der Elektrostatik sowie einige durch elektrostatische Effekte bedingte Probleme in der technischen Welt.

4.8.1 Elektrostatik der Erdatmosphäre (-)

Uns allen sind Vorgänge innerhalb der Erdatmosphäre, die ihre Ursache in elektrostatischen Mechanismen haben, unter dem Namen Blitz und Donner wohlbekannt: Unter geeigneten Bedingungen entstehen in Höhen ab ca. $600 \cdot m$ und bis zu mehreren km Wolkenformationen von einigen km lateraler Ausdehnung, die sich teils innerhalb einer derartigen Wolke, teils von Wolke zu Wolke und relativ zum Erdboden auf unterschiedliche elektrische Potenziale aufladen. Die hierbei auftretenden Potentialdifferenzen können bis zu einigen $10^7 \cdot V$ betragen. Treffen mehrere derartige Wolkenformationen auf einander, so kommt es nicht nur zu i.a. heftigen Regenfällen, sondern insbesondere zu elektrischen Entladungsvorgängen von jeweils nur kurzer Dauer (im Bereich von $10^{-4} \cdot s$ bis $10^{-2} \cdot s$), aber mit z.T. spektakulären (s. Abb. 6 und 7) und für Mensch, Tier- und Pflanzenwelt immer gefährlichen Begleiterscheinungen. Das Gesamtgeschehen bezeichnen wir als *Gewitter* und jeden einzelnen Entladungsvorgang als einen *Blitz*.



Abb. 6 (a) Blitzeinschlag in den Eiffelturm am 03.06.1902

(Quelle: Das Photo stammt aus der Wikimedia Commons; Erstpublikation M.G.Loppé, Bulletin de la Société Astronomique de France, Mai 1905)

(b) Blitzeinschlag in den Schweizer Bergen, aufgenommen 2012 vom Sturmchasing Verein Schweiz; [®]scvs, Reproduktion mit frdl. Genehmigung der Autoren)

Blitzentladungen verlaufen zum einen von einer Wolke bis zur Erdoberfläche (*Erdblitz*), aber auch zwischen unterschiedlich aufgeladenen Wolken (*Wolkenblitz*). Für beide Verläufe finden wir auf beiden Aufnahmen der Abb. 6 Beispiele. Erdblitze verlaufen i.a. von der untereren Begrenzung der Wolke zum Erdboden; sie können aber auch von dem oberen Bereich der Wolke ausgehen. Die Einzelheiten dieser Vorgänge sind bis heute noch nicht vollständig verstanden. Erste Überlegungen und Untersuchungen zu diesem Phänomen führte Franklin etwa ab 1750 durch. Im Zuge dieser Arbeiten gelang ihm 1752 die Erfindung des Blitzableiters. Die ak-



Abb. 7 Gewitter über Simon's Town/Kapstadt (Republik Südafrika)
(Quelle: <http://berendlange.com> ; Fotograf Stephan Cruickshank)

tuelle Blitzforschung konzentriert sich insbesondere auf die Aufklärung der 1. Phase des Gesamtvorgangs *Blitzentladung*, nämlich der Bildung von *Stromkanälen*, s. Absatz S. 561.

Die geographischen Gebiete auf der Erde mit der höchsten Gewitterrate sind die Tropen. Allerdings sind sie dort für Mensch und Tier weniger gefährlich als die in den mittleren Breiten auftretenden Gewitter. In den Tropen sind nämlich die Gewitterwolken bis in besonders große Höhen ausgedehnt, und die Blitzentladungen laufen fast ausschließlich zwischen den verschiedenen Wolken ab und erreichen nur selten den Erdboden.

Die elektrostatische Aufladung von Gewitterwolken (-)

Wir diskutieren nun die Frage, warum gerade die wegen dieses Verhaltens als *Gewitterwolken* bezeichneten Wolken, und nur diese, dazu neigen, sich derart stark elektrostatisch aufzuladen, dass es zu Blitzentladungen kommt.

Wolken dieses besonderen Typs sind meist die Folge starker lokaler Aufwinde insbesondere an heißen Sommertagen (s. Abschnitt 8.7.3) sowie einer hohen relativen Feuchte (s. Abschnitt 8.1.14) der bodennahen Luft. Da Wasser eine **niedrigere** Molekülmasse hat als Stickstoff und Sauerstoff, **sinkt** die Dichte von Luft mit zunehmender Feuchtigkeit. Daher steigt lokal erwärmte **feuchte** Bodenluft i.a. deutlich höher in die Atmosphäre als **trockene**. Außerdem wird mit Einsetzen der Kondensation die

Abkühlung infolge der frei werdenden Kondensationsenergie zusätzlich verlangsamt. Dank all dieser Effekte reichen Gewitterwolken leicht bis in Höhen der Größenordnung $10 \cdot km$. Durch Wetterbeobachtung belegt ist heute eine enge Korrelation zwischen dem Gehalt an Eiskristallen in einer Wolke und ihrer elektrostatischen Aufladung. Vermutlich besteht daher der Primär-Mechanismus der Aufladung in Reibungsvorgängen **innerhalb** der Wolke, z.B. zwischen den Eiskristallen und der umgebenden Luft, oder zwischen aufsteigenden sehr kleinen und absinkenden größeren Eiskristallen. Reibungseffekten zwischen der Wolke und anderen Luftschichtungen außerhalb der Wolke sind dagegen vermutlich nur von untergeordneter Bedeutung.

Im Resultat ist meist der obere Teil einer Gewitterwolke positiv gegenüber ihrem unteren Teil aufgeladen. Dieser untere Wolkenrand ist dann gegenüber dem Erdboden negativ aufgeladen. Diese Differenz des elektrostatischen Potentials kann Werte bis zu

$$|U_{\text{Wolkenrand}} - U_{\text{Erdboden}}| \approx 10^7 \cdot V$$

erreichen.

Die Entstehung von Blitz und Donner (-)

Wie wir aus den voraus gegangenen Abschnitten bereits gelernt haben, sind die typischen Werte für das elektrostatische Feld der Atmosphäre in einem Gebiet mit einer oder mehreren Gewitterwolken

$$|U_{\text{Wolkenrand}} - U_{\text{Erdboden}}| \approx 10^7 \cdot V \quad ; \quad |h_{\text{Wolkenrand}} - h_{\text{Erdboden}}| \approx 10^3 \cdot m \quad (4.304)$$

Die **mittlere** elektrische Feldstärke in diesem Bereich der Atmosphäre beträgt demnach

$$\mathcal{E} \approx 10^4 \cdot \frac{V}{m} \quad (4.305)$$

Sie liegt also um den Faktor 10^2 **unter** dem Erfahrungswert für die sog. Durchschlagfeldstärke in feuchter Luft von

$$\mathcal{E}_{\text{F-Entl.}} \gtrsim 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{V}{m}$$

s. Abschnitt 8.3.7. Dieser Wert ist durch eine Vielzahl von im Labor generierten Funken-Entladung bestätigt. Als die Blitz-Entladung unterstützend kommt sicherlich hinzu, dass mit zunehmender Kondensation innerhalb der Wolke sich der untere Rand der Wolke in Richtung Erdboden absenkt. Dennoch ist es alles andere als offensichtlich, über welchen Prozess die Entladung zwischen Wolke und Erdboden (oder auch von Wolke zu Wolke) ausgelöst wird.

Die aktuelle Forschung hat heute (2013) weitgehend die von *Alexandr Viktorovich Gurevich* (* 1930 in Moskau; heute Leiter des Moskau Institute of Physics and Technology) 1992 aufgestellte Hypothese der Blitz-Initiierung durch den sog.

run-away-Elektronenprozess akzeptiert. Dieser Prozess basiert auf der theoretisch begründeten und experimentell bestätigten Tatsache, dass der Wirkungsquerschnitt für die Streuung schneller Elektronen in Luft mit der Elektronengeschwindigkeit wohl zunächst (wie erwartet) zunimmt, ab einer gewissen kritischen Geschwindigkeit v_0 aber wieder und immer stärker abnimmt. Sobald also in einem betrachteten Volumen ein ausreichend starkes elektrisches Feld vorherrscht und zusätzlich eine Quelle für einige Elektronen mit einer Geschwindigkeit $v > v_0$ existiert, tritt eine lawinenartige Verstärkung dieses Teilchenstroms auf: Die Elektronen werden durch das elektrische Feld weiter beschleunigt, stoßen gelegentlich mit den Molekülen der Luft und erzeugen dabei weitere Elektronen, die sich ihrerseits an diesem Beschleunigungs- und Stoßprozess beteiligen. Im Ergebnis entsteht in diesem Volumen ein heißes Plasma, das einen sehr niedrigen elektrischen Widerstand besitzt. Man schätzt für die Temperatur in diesen Plasmen einen Wert von

$$T(\text{Plasma}) \sim 3 \cdot 10^4 \cdot K$$

Im Fall der Auslösung von Blitzen in der Erd-Atmosphäre nimmt man als Quelle für die Erzeugung der als Auslöser wirkenden hochenergetischen Elektronen die kosmische Strahlung an, die ständig aus dem Weltall kommend unsere Erde erreicht, s. Abschnitt 10.4.1. Seit 2001 glaubt man, eine experimentelle Bestätigung dieser Hypothese gefunden zu haben: Da gelang es nämlich erstmals, die bei diesen Prozessen entstehende Bremsstrahlung in Form von γ -Strahlung nachzuweisen.

Das Ergebnis dieser 1. Phase der Entstehung eines sog. Erdblitzes ist also die Umwandlung der atmosphärischen Luft in ein heisses Plasma, jedoch zunächst begrenzt auf einige nicht zusammenhängende Teilvolumina des Bereichs zwischen Wolkenunterrand und Erdboden. Die Längsausdehnung dieser Bereiche ist jedoch bereits bevorzugt in der Richtung des maximalen Feldgradienten orientiert. Wegen des relativ niedrigen elektrischen Widerstands innerhalb dieser Plasmen bricht die Potenzialdifferenz in diesen Volumina weitgehend zusammen. Dadurch steigt aber die elektrische Spannung zwischen 2 benachbarten Plasmavolumina entsprechend an und bevorzugt hierüber die Bildung eines Plasmas auch in diesen Zwischenbereichen. Unter geeigneten Bedingungen bildet sich während dieser 2. Phase ein von der Wolke bis zum Erdboden reichender durchgehender Stromkanal. Anderenfalls verlöscht das Plasma in den zunächst gebildeten Teilvolumina wieder. Sobald sich aber ein durchgehender Stromkanal mit ausreichend niedrigem elektrischen Widerstand gebildet hat, setzt der makroskopische Entladungsprozess der Wolke zum Erdboden ein. Der elektrische Strom erreicht während des Entladungsvorgangs von einigen *ms* Werte der Größenordnung

$$I_{\max} = (2 \dots 6) \cdot 10^4 \cdot A$$

Hierbei steigt die Temperatur des den Stromkanal bildenden Plasmas nochmals stark an. Der Stromkanal erreicht einen Durchmesser von etwa

$$D(12 \cdot mm)$$

Dieser von statistischen Effekten dominierte Prozess der Bildung eines Stromkanals erklärt zwangsläufig, wieso ein Blitz meist noch nicht einmal annähernd geradlinig von der Wolke bis zum Erdboden verläuft.

Die Bildung des Stromkanals und die über ihn ablaufende Entladung der Wolke führen zu einem extremen Anstieg der Temperatur und des Drucks der in diesem Kanal enthaltenen Luft und zwar innerhalb der Blitzdauer der Größenordnung $10^{-3} \cdot s$. Danach gleicht sich zunächst der enorme Druckunterschied durch radiale Expansion dieses Luftschauchs aus. Diese Expansion erfolgt in die umgebende Luft hinein und zwar zunächst mit Überschallgeschwindigkeit. Dieser Teil des Expansionsvorgangs wird daher von einem externen Beobachter als Knall wahrgenommen, analog zum Überschallknall, den ein mit Überschall vorbei fliegendes Flugzeug erzeugt. Mit zunehmender Entfernung von der Schallquelle, dem Blitz, verschmiert diese Stoßwelle auf Grund der Schalldispersion zu einem sekundenlangen Rumpeln, das wir als *Donner* bezeichnen. Aus der wahrgenommenen zeitlichen Verzögerung zwischen Blitz und zugehörigem Donner kann daher auf die Entfernung zwischen dem Blitz und dem Beobachter geschlossen werden.

Der Blitzableiter (-)

Seit den bahnbrechenden Arbeiten von Benjamin Franklin gibt es technische Vorrichtungen zum bestmöglichen Schutz von Gebäuden und technischen Anlage vor einem Blitzeinschlag. Derartige Anlagen bezeichnet man heute normgerecht als *Blitzschutzsysteme*. Dessen wichtigstes Element ist der eigentliche *Blitzableiter*, ein elektrisch leitender Stab, der meist an seinem oberen Ende zu einer Spitze verjüngt ist und an einer exponierten Stelle des zu schützenden Gebäudes senkrecht montiert ist. Dieser Blitzableiter ist über ein elektrisch leitendes Kabel mit dem Erdboden verbunden. Dieses Kabel wird vollständig an der Außenseite des Gebäudes verlegt und hat eine ausreichend hohe elektrische Leitfähigkeit, die sicherstellt, dass das Kabel im Fall eines Blitzeinschlags nicht zerstört wird, s. hierzu Aufgabe 18 aus Heft 8 (*Thermodynamik*).

Lange Zeit vertrat man die Auffassung, dass die Schutzfunktion des Blitzableiters darin besteht, einen Blitzeinschlag in das Haus dadurch zu verhindern, dass der Blitz den Weg über den Blitzableiter wählt. Dieser Weg ist nicht nur wegen des niedrigen elektrischen Widerstands des Blitzableiterkabels begünstigt, sondern insbesondere durch die besondere elektrostatische Funktion der Blitzableiterspitze: Sobald die Luft im Umfeld des Blitzableiters infolge der Gewittersituation auf ein gegenüber dem Erdboden deutlich unterschiedliches elektrisches Potenzial aufgeladen ist, erreicht die elektrische Feldstärke um die Spitze herum relativ hohe Werte. Das führt im Bereich der Spitze zu ersten Korona-Entladungen, und die Luft wird in diesem Bereich partiell ionisiert und damit elektrisch leitend. Dadurch wird der gesamte Bereich um die Spitze des Blitzableiters herum zu einer für die Bildung eines Blitz-Stromkanals begünstigten Zone.

Diese Interpretation hat sicherlich eine gewisse Berechtigung. Heute geht man jedoch davon aus, dass eine andere Funktion von zumindest gleichwertiger Relevanz für die Schutzfunktion ist: Der Blitzableiter erzwingt im Bereich seiner Außenhaut (von der Spitze bis zum Erdboden) das elektrische Potenzial $0 \cdot V$. Daher ist auch die elektrische Feldstärke \mathcal{E} in der unmittelbaren Umgebung um den Blitzableiter herum besonders klein. Die spontane Bildung von Plasmabereichen nach dem o.a. Bildungsprozess wird in der Umgebung des Blitzableiters deutlich unterdrückt.

Als Orientierung geht man heute davon aus, dass der gesamte Bereich, der sich in der Halbkugel befindet, die durch den Erdboden als Grundfläche und die Blitzableiterspitze als Zenith gebildet wird, als von dem Blitzableiter geschützten Raum angesehen werden darf. Technische Anlage, in deren unmittelbarer Nähe keine hohen elektrischen Ströme unkontrolliert fließen sollten, sichert man daher häufig in der Weise, dass man mehrere Blitzableiter um die Anlage herum aufstellt, während die Anlage selbst keinen Blitzableiter trägt, s. Abb. 8. Diese Abb. zeigt eine startbe-



Abb. 8 Startplatz ELA-3 des Centre Spatial Guyanais in Kourou/dép. Guyane (Frankreich) mit einer startbereiten Ariane 5
(Quelle: ESA/ PR No. 26-2013)

reite Ariane-5-Rakete auf ihrem Startplatz im Raumfahrtzentrum in Kourou. Die zu schützende Rakete selbst ist nicht elektrisch mit einer Blitzschutzanlage verbunden. Sie wird passiv geschützt durch die 4 Blitzschutztürme, die um sie herum postiert sind und deutlich höher sind als die zu schützende Rakete.

4.8.2 *Der elektrostatische Kopierer (-)*

Elektrostatistische Kopiergeräte sind aus unserem täglichen professionellen und privaten Leben kaum noch fort zu denken, auch wenn sie zumindest im Bereich der PC-Drucker

mehr und mehr durch die sog. *Tintenstrahl-Drucker* (engl. *ink jet*) verdrängt werden. Ihr Funktionsprinzip ist in der Abb. 9 skizziert: Die zu kopierende Bildinformation

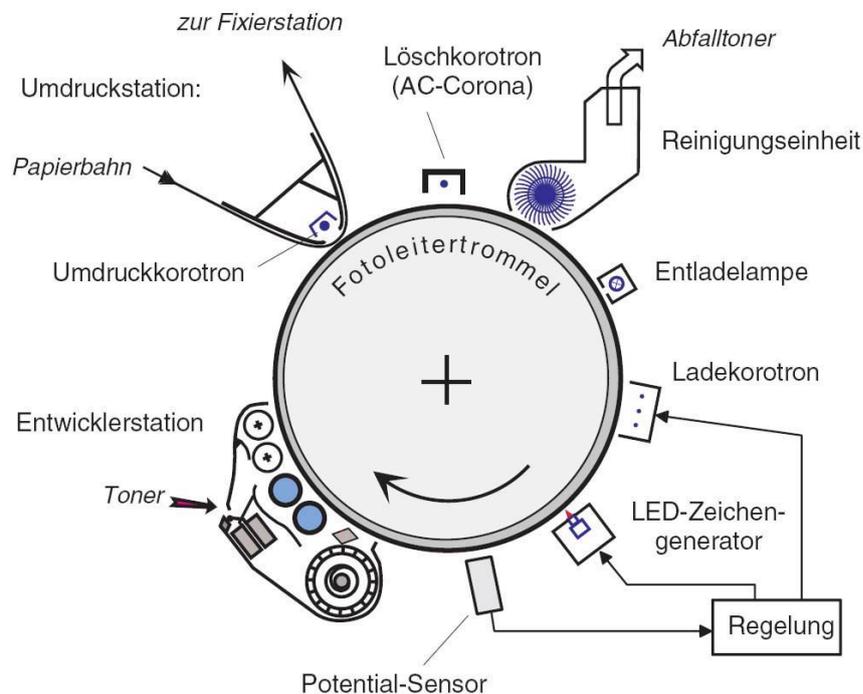


Abb. 9 Funktionsprinzip des elektrostatischen Kopierverfahrens

(Quelle: Dieses Bild basiert auf dem Bild Elektrofotographie Prozess.png aus der freien Enzyklopädie Wikipedia und steht unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation)

liegt i.a. in Form eines bedruckten Papierblattes vor. Diese wird durch ein optisches System, z.B. durch eine zeilenweise arbeitende Abtastanordnung, auf die Oberfläche einer Zylinder-Trommel abgebildet, die mit einer photoleitenden Schicht beschichtet ist. Als *photoleitend* bezeichnet man Materialien, deren spezifische elektrische Leitfähigkeit ohne Lichteinfall sehr niedrig ist, in Folge einer Belichtung aber stark ansteigt. Insgesamt läuft der Kopierprozess etwa in folgenden Schritten ab:

1. Gleichmäßiges Aufladen der Trommel-Oberfläche;
2. Übertragen des zu kopierenden Bildes von der Vorlage auf die Bildtrommel (als Ladungsbild);
3. Entwickeln des Ladungsbildes in ein Farbtone-Bild;
4. Übertragen des Tonerbildes von der Bildtrommel auf das Kopiermaterial (Papier oder Folie);

5. Fixieren der von der übertragenen Tonerstruktur gebildeten Bildkopie;
6. Reinigung der Bildtrommel von den Toner-Resten.

Der Schritt (1) erfolgt durch die in der in der Abb. 9 als *Ladekorotron* bezeichnete 2-Elektroden-Station, die aus einem Gitter und der Bildtrommel gebildet wird. Bei einer Spannungsdifferenz zwischen den beiden Elektroden von der Größenordnung $5 \cdot kV$ brennt in dieser Kammer eine Korona-Entladung (s. Abschnitt 8.3.7), und die Oberfläche der Bildtrommel wird gleichmäßig mit einer Oberflächenladung belegt.

Im Schritt 2 wird das Bild der Vorlage auf die Trommel-Oberfläche optisch abgebildet. Die photoleitende Schicht wird dadurch partiell leitfähig und es entsteht ein Ladungsbild der Bildvorlage: An deren hellen Stellen wird die Oberflächenladung weitgehend abgebaut, an deren dunklen Stellen bleibt sie dagegen erhalten.

(XXX: Der an dieser Stelle vorgesehene weitere Text ist noch nicht verfügbar.)

Die technische Entwicklung derartiger Verfahren und Geräte begann etwa 1935 bei der deutschen Firma Agfa in Leverkusen und in etwa zeitgleich in den USA durch den (damals noch) Jurastudenten *Chester Floyd Carlson* (* 1906 in Seattle/Wt(USA); † 1968 in New York/NY(USA))(XXX: präzisieren). Mit Ausbruch des 2. Weltkrieges wurde zumindest bei der Agfa in Deutschland die Entwicklung unterbrochen. Die dort vorhandenen technischen Unterlagen und die dazu gehörenden Patente wurden mit Ende des Krieges als *Kriegsbeute* in die USA transferiert und an die amerikanische Firma Haloid in Rochester (NY/USA) verkauft, die bis dahin im wesentlichen Photopapiere herstellte. Diese erwarb 1947 zusätzlich vom Batelle Memorial Institute in Columbus/Ohio(USA) die Lizenz für die Carlsonschen Patente und entwickelten das Konzept bis zur Marktreife weiter. 1949 brachte die Fa. Haloid den ersten elektrostatischen Kopierer *Xerox Model A* auf den Markt. Die von ihr gewählte Bezeichnung *Xerox* leitet sich aus den griechischen Wörtern $\zeta\epsilon\rho\sigma$ (*trocken*) und $\gamma\rho\alpha\phi\epsilon\iota\nu$ (*schreiben*) ab.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Der elektrostatische Kopierer* ist noch nicht verfügbar.)

4.8.3 *Elektrostatische Sprühvorrichtungen (-/-)*

(XXX: Der Text des Abschnitts *Elektrostatische Sprühvorrichtungen* ist noch nicht verfügbar.)

4.8.4 *Elektrostatische Probleme in Produktionsbetrieben (-/-)*

In diesem Abschnitt werde ich eine Klasse von Problemen diskutieren, die an technischen Anlagen z.B. zur Herstellung und Verarbeitung chemischer Produkte entstehen können, und deren gemeinsames Merkmal darin besteht, dass die primäre diese Probleme auslösende Ursache aus den elektrostatischen Eigenschaften der beteiligten Materialien resultiert. In den meisten Fällen handelt es sich um Probleme, die aus dem Grundphänomen der Reibungselektrizität resultieren, die wir bereits im Abschnitt 4.6

behandelt haben. Hiermit muss immer dann gerechnet werden, wenn zumindest einer der beteiligten Partner, z.B. das Herstellungsprodukt, eine relativ niedrige elektrische Leitfähigkeit besitzt, und wenn hohe Relativgeschwindigkeiten zwischen diesem Partner und einem weiteren, an diesem Prozess beteiligten System auftreten. Als Folge davon treten relativ hohe Spannungsdifferenzen in dem Gesamtsystem auf, die sich dann unkontrolliert entladen können. In harmloseren Fällen verändern sich durch diese elektrostatischen Aufladungen die Bedingungen des Herstellungsprozesses, z.B. durch Verklumpung von Pulvern oder deren unerwünschtes Haften an Behälterwänden etc. . Bei der Herstellung oder Verarbeitung von Folien können sich die Laufeigenschaften des Folientransports insbesondere beim Abwickeln oder Aufwickeln so stark verändern, dass es nicht mehr gelingt, den eigentlichen Prozess sicher zu beherrschen. Im schlimmsten Fall können diese unkontrollierten Entladungsvorgänge Brände oder (bei entsprechend kritischen Herstellungs- oder Zwischenprodukten) Explosionen auslösen. Die sichere Beherrschung dieser Problematik ist ein wichtiges Aufgabengebiet der Verfahrenstechnik.

Staubexplosionen (-/-)

(XXX: Der Text des Absatzes *Staubexplosionen* ist noch nicht verfügbar.)

Elektrostatische Aufladung schnell laufender Maschinenteile (-)

Ein auch aus dem täglichen Leben wohl bekannter Mechanismus der elektrostatischen Aufladung ist das schnelle Gleiten oder Abrollen 2-er Körper (z.B. Maschinenteile) auf einander: Bei entsprechender Auswahl der Materialien für Kleidung und Stuhlpolsterung kann man die beiden Reibpartner Mensch und Stuhl durch ein Hin- und Her-Rutschen auf einem Stuhl auf Spannungsunterschiede der Größenordnung $10^3 \cdot V$ aufladen, so dass bei einer anschließenden Annäherung z.B. eines Fingers an die Stuhl-Polsterung Spitzen-Entladungen über einen Luftabstand der Größenordnung $1 \cdot mm$ erzeugt werden können. Bei dem gerade geschilderten System *Mensch und Stuhl* kommt es i.a. nur zu unangenehmen, aber nicht gefährlichen Vorgängen. Ein ähnlicher Mechanismus ist jedoch im Grundsatz an jeder schnell laufenden Maschine möglich und kann hier zu gefährlichen Entladungsvorgängen führen.

(XXX: Der weitere Text des Absatzes *Elektrostatische Aufladung schnell laufender Maschinenteile* ist noch nicht verfügbar. In ihm wird auch der nachfolgende Text aufgehen:)

In besonderem Masse kritisch für derartige Effekte ist die Produktion von konventionellen photographischen Filmen und Papieren (s. Abschnitt 11.13.2). Der Produktionsprozess besteht aus der Beschichtung einer mehrere m breiten und mehrere $1000 \cdot m$ langen Folie auf der Basis von Cellulose bzw. Papier. Die Transportgeschwindigkeit bei diesem Prozess beträgt heute $100 \cdot \frac{m}{s}$ und mehr! Da es sich um extrem lichtempfindliche Materialien handelt, verläuft der eigentliche Produktionsprozess in

völliger Dunkelheit, und es muss jeder geringste, mit der Erzeugung von Licht verbundene Entladungsvorgang sicher verhindert werden. Anderenfalls detektiert man an dem fertigen Produkt nach seiner vorgesehenen Verwendung zusätzlich zu dem aufgenommenen Photo typische optische Strukturen, die als *Verblitzungen* bezeichnet werden. Die entsprechende Produktcharge ist dann i.a. unverkäuflich.

(XXX: Der weitere Text des Abschnitts *Elektrostatistische Probleme in Produktionsbetrieben* ist noch nicht verfügbar.)

(XXX: Der weitere Text des Kapitels *Elektrostatik des täglichen Lebens* ist noch nicht verfügbar.)

4.9 Tipps, Tricks und Spezialitäten (-)

(XXX: Der Kopftext des Kapitels *Tipps, Tricks und Spezialitäten* ist noch nicht verfügbar.)

4.9.1 Nutzen/Grenzen der Fourier-Darstellung v. $\chi(t)$ (-/-)

(XXX: Der Text des Abschnitts *Nutzen/Grenzen der Fourier-Darstellung v. $\chi(t)$* ist noch nicht verfügbar.)

4.9.2 Verhalten im Freien bei Gewitter (-)

Grundsätzlich ist der Aufenthalt von Mensch und Tier bei drohendem Gewitter im Freien nach Möglichkeit zu vermeiden. Die bei jedem Blitzeinschlag im Stromkanal selbst, aber auch in seiner unmittelbaren Nachbarschaft auftretende Zerstörung stellt für jedes Lebewesen eine überlebensgefährdende Gefahr dar. Gegen diese unmittelbare Bedrohung gibt es daher auch kaum Gefahren mindernde Verhaltens-Vorschläge. Unbestritten ist, dass in vertikal wenig strukturierten Gegenden, also z.B. auf einer größeren Wasserfläche oder auf einer flachen Ebene mit wenig Baumbewuchs, der Blitzeinschlag wesentlich häufiger in die wenigen verbleibenden hohen Objekte erfolgt als in den völlig flachen Restbereich des Geländes. Man reduziert also signifikant das Risiko eines Blitzeinschlags in unmittelbarer Nähe der eigenen Position, wenn man diese wenigen hohen Objekte meidet. In einem Segelboot auf dem Wasser sollte man daher, wenn möglich, den Mast legen. An Land sollte man sich **nicht** unter einen Baum stellen, ob Eiche oder Buche macht entgegen dem Volksmund an dieser Stelle keinen Unterschied. Vielmehr sollte man eine Stelle aufsuchen, die **möglichst weit** von dem nächsten Baum **entfernt** ist.

Wir diskutieren nun den Fall, dass ein Blitz in einer Entfernung von uns einschlägt, bei der uns der primäre Stromkanal nicht mehr unmittelbar gefährden kann. Nur dann haben wir eine Chance, mit einem blauen Auge davonzukommen. Jetzt gilt es zu bedenken, dass die elektrische Ladung, die mit einem in den Erdboden abgeleiteten Stromimpuls mit einem Spitzenwert der Größenordnung $2 \cdot 10^4 \cdot A$ verbunden

ist, von dem Erdreich nicht lokal aufgenommen und neutralisiert werden kann, sondern sich über einen größeren Flächenbereich verteilt. In der näheren und weiteren Umgebung um den unmittelbaren Blitzeinschlag herum tritt also kurzzeitig ein System von oberflächennahen Flächenströmen auf und damit verbunden ein System von Spannungsabfällen entlang dieser Ströme. Hierbei können auf einer Länge von $1 \cdot m$ durchaus Spannungsdifferenzen von mehreren $100 \cdot V$ auftreten. Würde man sich also, wie oft zu lesen, flach auf den Boden legen, wäre man durch dieses von den Ableitungsströmen im Erdreich erzeugte Spannungsfeld ernsthaft gefährdet, sobald nur der Blitz in nicht allzu großer Entfernung eingeschlagen hat. Man sollte sich also **nicht hinlegen**, sondern möglichst tief gebeugt auf den Boden hocken und dabei die Füße möglichst dicht neben einander stellen, um die *Messlänge*, mit der unser Körper dieses Spannungsfeld *abtastet*, so klein wie möglich zu machen. Die Abb. 10 zeigt eine Demonstration dieser Körperhaltung. Größere vierbeinige Tiere, z.B. Pferde



Abb. 10 Demonstration der richtigen "Gewitterhaltung" im Freien
(Quelle: © Hit-Radio FFH, 61111 Bad Vilbel; Reproduktion mit frdl. Genehmigung der Redaktion)

oder Kühe, sind daher bei Gewitter im Freien ernsthaft gefährdet. Daher verhalten sie sich (auch im Stall) entsprechend nervös, sobald sie ein Gewitter wahrnehmen.

Ich muss zugeben, die in der Abb. 10 gezeigte Haltung ist etwas unbequem. Wesentlich angenehmer verbringt man sicherlich ein Sommergewitter **im Inneren** eines durch einen guten Blitzableiter (s. Absatz S. 563) geschützten Hauses, trennt alle gegen Überspannungen empfindlichen elektronischen Geräte vom Stromnetz (nicht nur ausschalten), setzt sich nicht in die unmittelbare Nähe der vom Blitz-

ableiter zum Erdboden führenden Leitung und verbringt den Abend in aller Ruhe z.B. bei einem Glas guten Rotweins.

(XXX: Der weitere Text des Kapitels *Tipps, Tricks und Spezialitäten* ist noch nicht verfügbar.)

4.10 Aufgaben (-)

1. Beweise unter ausschließlicher Verwendung der Definition 119 für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen die Sätze 120 und 121.
2. (XXX: Der Text der an dieser Stelle vorgesehenen Aufgabe ist noch nicht verfügbar.)
3. 2 identische Körper der Masse M und der elektrischen Ladung Q werden aus dem Unendlichen auf einen Abstand Δr an einander angenähert. Bestimme das Verhältnis der beiden hierdurch bewirkten Energieänderungen, die auf der elektrostatischen Wechselwirkung einerseits und der Gravitation andererseits beruhen.
4. Bei der Berechnung der Feldenergie eines Plattenkondensators im Abschnitt 4.4.3 wurde der Beitrag des sog. *Streufeldes* durch den dimensionslosen Geometriefaktor g berücksichtigt, s. Gl. 4.251 und es wurde angenommen, dass dieser Faktor i.a. sehr nahe bei 1 liegt, d.h.

$$(g - 1) \ll 1 \quad (4.306)$$

. Schätze diese Größe grob zu großen Werten hin ab, ohne die für dieses System geltenden Differenzialgleichungen (Gl.-en 4.183 und 4.184) explizit zu lösen. Nimm zur Vereinfachung der Rechnung an, dass die Platten des Kondensator kreisförmig sind.

5. 2 Körper seien auf die Ladung $+Q$ bzw. $-Q$ aufgeladen und befinden sich in einem Ausgangsabstand Δr_0 von einander. Berechne die Energie, die erforderlich ist, um diese beiden Körper völlig von einander zu trennen. Berechne im Vergleich dazu die Energie eines Kugelschalen-Kondensators, also einem kugelförmigen Körper (1) mit dem Radius Δr_0 und der Ladung $+Q$ und einer Kugelschale vom Radius $\Delta r_1 > \Delta r_0$ um diesen Körper herum, die die Ladung $-Q$ trägt.
6. (XXX: Der Text weiterer Aufgaben ist noch nicht verfügbar.)

4.11 Zahlenwerte (-/-)

(XXX: Der Text des Kapitels Zahlenwerte ist überwiegend noch nicht verfügbar. In ihm werden die nachfolgenden Tabellen aufgehen.)

Einige Naturkonstanten

Bezeichnung	Kennz.	Zahlenwert	Quelle
Vakuum-Dielektrizitätskonstante	ε_0	$8,85418782 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$	[3] in Heft 15
Elementarladung	Q_0	$1,60217649 \cdot 10^{-19} \cdot A \cdot s$	

(XXX: Die Daten weiterer Zahlenwerte sind noch nicht verfügbar.)

4.12 Literatur (-)

1. (XXX: Das an dieser Stelle vorgesehene Literaturzitat ist noch nicht verfügbar.)
2. Günter Lüttgens, Martin Glor Understanding and Controlling Static Electricity, expert verlag Ehningen 1989
3. Hendrik A. Kramers, R.L. de Kronig, La Diffusion de la Lumière par les Atoms, Atti. Congr. Intern. Fisici 2 (1927) p. 545-557
4. H.A. Lorentz, Über die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte, Ann. Phys. 9 (1880), S. 641-665
5. J. Curie, P. Curie, D'éveloppement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences 91 (1880) p. 294 sowie diverse weitere nachfolgende Publikationen ebenda.
6. R.A. Millikan, The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of its Charge, and the Correction of Stokes Law, Phys.Rev. (Series I) 32 (1911), p. 349-397